

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

Moisil, Gr. C.: Sur un calcul des théorèmes. C. R. Acad. Sci. Roum. 2, 221—227 (1938).

The author understands a "theorem" as a formula of the propositional calculus preceded by quantifiers asserting its universal validity, or a conjunction of a finite number of such. He defines equality, inclusion, and equivalence of theorems, and states some elementary properties of these notions. He defines a "system of equivalence" as a class of equivalent theorems; a "theory" as a class of systems of equivalence which is closed with respect to derivation of consequences; and a "system of causation" as one closed with respect to the converse process. He states some elementary algebraic properties dealing with combinations of such systems as illustrations of his researches on the algebra of logic.

H. B. Curry (State College, Pa.).

Pepis, Józef: Ein Verfahren der mathematischen Logik. J. Symbolic Logic 3, 61—76 (1938).

In dieser Arbeit wird ein wichtiger Fortschritt in der Erfüllbarkeitstheorie erreicht, indem zu jedem Zähl Ausdruck A in der allgemeinen pränexen Normalform ein in bezug auf Erfüllbarkeit gleichwertiger Ausdruck B konstruiert wird, wo

$$B = (x)(y)(Ez) \Phi(z, x, y) \& (x_1)(x_2) \dots (x_n) \mathfrak{B};$$

Φ ist eine in A nicht vorkommende Funktionsveränderliche, \mathfrak{B} ein in einfacher Weise aus Φ und A aufgebauter, von Quantoren freier Ausdruck. B ist also Spezialfall erstens der Skolemschen Normalform mit nur einem Seinszeichen, zweitens der Kalmárschen Normalform ohne voranstehende Seinszeichen; es läßt sich mit der gleichen Methode auch die Ackermansche Normalform (Math. Ann. 112, 419—432; dies. Zbl. 13, 241) erreichen. Der Beweis enthält zugleich eine sehr einfache Ableitung des Löwenheim-Skolemschen Satzes.

A. Heyting (Laren).

Pepis, Józef: Untersuchungen über das Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. Fundam. Math. 30, 257—348 (1938).

Die in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 14, 98) erhaltenen Ergebnisse zum Entscheidungsproblem der Prädikatenlogik werden durch Weiterentwicklung der benutzten Methoden verschärft. Insbesondere wird die Anzahl der Prädikatvariablen in den Normalformen, auf die man sich bezüglich der Frage der Erfüllbarkeit eines „Zähl ausdrucks“ beschränken kann, weiter vermindert. So werden folgende „erfüllungstheoretische Normalformen“ erhalten: 1. Skolemsche Normalform mit nur vier Allzeichen, d. h. mit dem Präfix $(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)(Ey_1) \dots (Ey_n)$ und mit lediglich einer dreistelligen Prädikatvariablen. 2. Die Pepische Normalform $(x)(y)(Ez) F(x, y, z) \& (u_1) \dots (u_n) \mathfrak{A}(u_1, \dots, u_n)$, worin F eine Prädikatvariable ist und der Ausdruck \mathfrak{A} außer F nur noch eine einstellige Prädikatvariable enthält. Statt $F(a, b, c)$ kann auch $R_1(a, c) \& R_2(b, c)$ gesetzt werden; R_1 und R_2 sind Prädikatvariable. 3. Die vorgenannte Normalform läßt sich offenbar in eine pränexe Formel mit dem Präfix $(x)(y)(Ez)(u_1) \dots (u_n)$ — Kalmársche Normalform ohne voranstehende Seinszeichen — oder auch mit dem Präfix $(x_1) \dots (x_n)(Ez)$ — Skolemsche Normalform mit nur einem Seinszeichen — umwandeln. So ergeben sich zwei weitere erfüllungstheoretische Normalformen, die gleichfalls nur eine einstellige, und eine dreistellige bzw. zwei zweistellige Prädikatvariable enthalten. 4. Die genannte spezielle Kalmársche Normalform kann auf das Auftreten von keiner weiteren als nur zwei — bzw. nur einer — zweistelligen Prädikatvariablen beschränkt werden, sofern dem Präfix ein — bzw. drei — Seinszeichen vorangestellt werden. 5. Die Ackermansche Normalform $(x)(Ey) F(x, y)$

& $(Ez)(u_1) \dots (u_n) \mathcal{A}(z, u_1, \dots, u_n)$ kann dahingehend beschränkt werden, daß außer F nur noch eine dreistellige und eine einstellige oder zwei zweistellige und eine einstellige Prädikatvariable vorkommen. *Gerhard Gentzen* (Göttingen).

Blake, Archie: *Canonical expressions in boolean algebra.* Chicago: Diss. 1938. 60 pag.

This paper contains two main results; the first is a contribution to Boolean Algebra, the second is a completeness theorem for the functional calculus of the first order analogous to those of Skolem and Gödel (Mh. Math. Phys. 1930). The first result is a special kind of disjunctive normal form for Boolean expressions, such that if A is any expression in this form, and B is any expression in disjunctive normal form, then B is included in A if and only if every term of B is included in some term of A . The author calls his new form a "syllogistic" normal form. It allows all the consequences of a given equation to be seen by inspection, and is a simpler means of achieving this result than the method of Poretsky. The second result is a law of transformation which associates with every expression in the calculus an infinite series of "reduced transforms", which are Boolean expressions, such that if every reduced transform is valid on a two-valued evaluation, then the original expression is also valid (allgemeingültig) for every non-null individual domain; while if some reduced transform is invalid, we can construct a two-valued representation over an infinite individual domain which reduces the given expression to falsity. *H. B. Curry* (State College, Pa.).

Destouches, Jean-Louis: *Sur l'unité de la physique théorique.* Bull. sci. Ecole polytechn. Timişoara 8, 49—70 (1938).

Weyl, Hermann: *Symmetry.* J. Wash. Acad. Sci. 28, 253—271 (1938).

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra, Polynome, Invariantentheorie:

Cramlet, C. M.: *On the reduction of a representation to classical canonical form.* Amer. Math. Monthly 45, 159—162 (1938).

The author gives a method for determining the transformation that occurs in the similarity relation between a given representation and its similar classical canonical form. *Raudenbush* (New York).

Cavallucci, Leopoldo: *Riduzione di una matrice alla forma canonica nel suo campo di razionalità.* Rend. Semin. mat. Univ. Padova 8, 92—109 (1937).

Elementare Transformation einer Matrix in die Kowalewskische Normalform (Leipziger Ber. 1917, 325; van der Waerden, Moderne Algebra II, 137). *Motzkin.*

Wajnszejn, Duwid: *Eine Formel für die Biquaternionen.* Bull. Sémin. mat. Univ. Wilno Nr 1, 25—27 (1938).

Es werden achtgradige Matrizen angegeben, die die Biquaternionen repräsentieren. *Auszug*

Rados, Gustav: *Über zyklische orthogonale Substitutionen.* Mat. természett. Értes. 57, Tl 1, 39—47 u. deutsch. Zusammenfassung 48—50 (1938) [Ungarisch].

Es wird hier der folgende Satz bewiesen: Eine orthogonale Substitution $y_v = \sum_{k=1}^n c_{vk} x_k$,

$v = 1, 2, \dots, n$, ist zyklisch, wenn ihre Koeffizienten totalreelle algebraische Zahlen sind und wenn die Koeffizienten ihrer charakteristischen Gleichung ganze algebraische Zahlen sind. Beim Beweise kommen wichtige Sätze von Brioschi, Kronecker und Frobenius zur Anwendung. Weiterhin wird gezeigt, daß im Falle von binären, orthogonalen Substitutionen die Bedingungen des obigen Satzes auch notwendig sind dafür, daß die Substitution zyklisch sei. *Otto Szász* (Cincinnati, Ohio).

Rados, Gustav: *Die explizite Darstellung einiger Resolventen.* Mat. természett. Értes. 57, Tl 1, 27—36 u. deutsch. Zusammenfassung 37—38 (1938) [Ungarisch].

Für gewisse Fälle wird die Resolvente der charakteristischen Gleichung einer

linearen Substitution explizite dargestellt. Dabei wird ein älterer Satz des Verf. und ein Satz von M. Bauer benutzt.

Otto Szász (Cincinnati, Ohio).

Rados, Gustav: Intuitive Herleitung verwickelter Determinantenrelationen. Mat. természett. Értes. 57, Tl 1, 1—14 u. deutsch. Zusammenfassung 15—16 (1938) [Ungarisch].

Die Beziehungen, die zwischen den Wurzeln der charakteristischen Gleichung einer bilinearen Form und denjenigen ihrer „abgeleiteten“ Formen bestehen, gestatten oft eine leichte Herleitung von Determinantenbeziehungen. Dies wird hier an einigen Fällen erörtert; dabei werden Sätze von G. Frobenius, von M. Bauer und vom Verf. benutzt.

Otto Szász (Cincinnati, Ohio).

Rados, Gustav: Über die Diskriminanten der charakteristischen Gleichung einiger abgeleiteten bilinearen Formen. Mat. természett. Értes. 57, Tl 1, 17—24 u. deutsch. Zusammenfassung 25—26 (1938) [Ungarisch].

Die Bezeichnungen in dieser Arbeit sind dieselben wie die in vorst. Ref. Es werden Teilbarkeitsbeziehungen hergeleitet zwischen der Diskriminante der charakteristischen Gleichung einer Bilinearform und den Diskriminanten der charakteristischen Gleichung abgeleiteter (adjungierter, induzierter usw.) Formen.

Otto Szász.

Szekeres, G., und P. Turán: Über ein Extremalproblem in der Determinantentheorie. Mat. természett. Értes. 56, 796—804 u. deutsch. Zusammenfassung 805—806 (1937) [Ungarisch].

Es bezeichne M_n das Maximum der absoluten Werte aller Determinanten n -ten Grades, deren Elemente ± 1 sind. Bekanntlich folgt aus einem Satze von Hadamard: $M_n \leq n^{n/2}$. Sodann folgt aus einem Resultat von Paley und aus dem Primzahlsatz nach Erdős, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n^{1/n} = 1$ ist. Es sei $S_n^{(k)} = \frac{1}{2^{n^2}} \sum [E^{\nu\mu}]^k$, wo über alle Determinanten $[E^{\nu\mu}]$ (von der Anzahl 2^{n^2}) n -ten Grades mit $E^{\nu\mu} = \pm 1$ summiert wird. Dann wird bewiesen: $S_n^{(2)} = n!$, $S_n^{(4)} = (n!)^2 \psi(n)$, wobei $\psi(1) = 1$, $\psi(2) = 2$, $\psi(n) = \psi(n-1) + \frac{1}{n} \psi(n-2)$ ist. Bekanntlich ist $M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n^{(2k)})^{\frac{1}{2k}}$; doch stößt die Berechnung von $S_n^{(2k)}$ für $k > 2$ auf Schwierigkeiten.

Otto Szász (Cincinnati, Ohio)

Lipka, Stephan: Über die Erweiterung der Descartesschen Zeichenregel. Mat. fiz. Lap. 45, 78—92 u. deutsch. Zusammenfassung 92—93 (1938) [Ungarisch].

Hat die reelle ganze Funktion $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ vom Geschlecht Null lauter reelle Nullstellen, so sind die Anzahl ihrer positiven Nullstellen und die Anzahl der Zeichenwechsel gleich. Dieser Satz gilt auch für eine Funktion $f(z)$ mit komplexen Nullstellen, wenn die Gesamtanzahl m ihrer positiven und komplexen Nullstellen endlich ist, und wenn die komplexen Nullstellen in einem innerhalb der Halbebene $\Re(z) < 0$ liegenden Kreise vom Halbmesser r liegen, dessen Mittelpunkt auf der reellen Achse liegt und vom Nullpunkte einen Abstand größer als $r \cdot \sqrt{m}$ hat. Verf. gibt auch andere Bedingungen, unter denen die Anzahl der positiven Nullstellen und die Anzahl der Zeichenwechsel der Koeffizientenfolge gleich sind. Endlich wird der folgende bekannte Satz aufs neue bewiesen: Ist $g(z)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, so ist die Anzahl der Zeichenwechsel in der Koeffizientenfolge des Polynoms $(1+z)^k g(z)$ für genügend große ganze Zahlen k der Anzahl der positiven Nullstellen von $g(z)$ gleich.

Sz. Nagy (Szeged).

Loria, Gino: Remarques sur les équations algébriques non rationnelles. Mathesis 52, 129—131 (1938).

Loria zeigt an dem Beispiel $\sqrt{x-4} - 3/\sqrt{x-4} - \sqrt{x-1} = 0$, daß durch die Wegschaffung der Wurzelzeichen nicht nur fremde Lösungen hereingebracht werden, sondern daß eine solche Gleichung ganz ohne Wurzeln sein kann. Die Quadratwurzeln sind dabei stets positiv zu nehmen. (Ein noch einfacheres Beispiel wäre übrigens

$\sqrt{x} = -1$). L. weist schließlich noch auf eine Stelle bei Descartes hin, wo der Nenner des Ausdrucks $12/(3 - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$ rational gemacht wird. *L. Schrutka* (Wien).

Gravé, D.: Sur l'impossibilité d'une résolution algébrique pour une équation générale plus que de quatrième puissance. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 4, 3—8 u. franz. Zusammenfassung 8 (1938) [Ukrainisch].

Dieser Beweis stützt sich auf die Tatsache, daß die konjugierten Funktionen der Wurzeln zu konjugierten Untergruppen der Galoisschen Gruppe gehören. Bewirkt demnach die Adjunktion der Irrationalität $\sqrt[p]{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ die Erniedrigung der Galoisschen Gruppe bis zu einer Untergruppe Q , so gehören die konjugierten Funktionen $\sqrt[p]{f}, \varepsilon \sqrt[p]{f}, \dots, \varepsilon^{p-1} \sqrt[p]{f} (\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}})$ zu derselben Untergruppe Q , woraus folgt, daß Q ein Normalteiler der Galoisschen Gruppe ist. Darauf folgt ein gewöhnlicher Beweis der Einfachheit der alternierenden Gruppe. *N. Tschebotaröw* (Kasan).

Reid, William T.: A theorem on quadratic forms. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 437—440 (1938)

In this note the following result is proved: Suppose $A[x] \equiv a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ (the tensor analysis summation convention is used throughout), $B[x] \equiv b_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ are real quadratic forms in (x_α) , $(\alpha = 1, \dots, n)$, and that $A[x] > 0$ for all real $(x_\alpha) \neq (0_\alpha)$ satisfying $B[x] = 0$. Then there exists a real constant λ_0 such that $A[x] - \lambda_0 B[x]$ is a positive definite quadratic form. *Auszug.*

Zahlentheorie:

Brauer, Alfred: Über die Dichte der Summe von Mengen positiver ganzer Zahlen. I. Ann. of Math., II. s. **39**, 322—340 (1938).

This paper contains results on the density γ of the sum-sequence of n given sequences of positive integers, of densities $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (for definitions, etc.; see Landau, Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie, Cambridge 1937). The results are modifications of those of Khintchine (see this Zbl. **6**, 155), Besicovitch (12, 394), and Schur (15, 99). For $n = 2$, $\alpha_1 \leq \alpha_2$, the author proves

$$\gamma \geq \min(1, \alpha_1 + \frac{4}{5}\alpha_2) \quad \text{and} \quad \gamma \geq \min(1, \frac{8}{5}(\alpha_1 + \alpha_2)).$$

Davenport (Manchester).

Hua, Loo-Keng: Some results in the additive prime-number theory. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **18**, 3 (1938).

Ankündigung der Resultate, die Verf. bereits ausführlich bewiesen hat (dies. Zbl. **18**, 294).

Hans Heilbronn (Cambridge).

Hua, Loo-Keng: Some results in the additive theory of numbers. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **18**, 4 (1938).

Verf. kündigt die folgenden Resultate an: Es sei $P(x)$ ein ganzwertiges Polynom vom Grade k . Dann gibt es eine nur von k abhängige Funktion $G(k)$, so daß für $s \geq G(k)$ alle hinreichend großen Zahlen einer bestimmten Restklasse in der Form $P(p_1) + \dots + P(p_s)$ darstellbar sind, wo p_1, \dots, p_s Primzahlen bedeuten. Verf. zeigt $G(4) \leq 17$, $G(5) = 31$, $G(k) \sim 6k \log k$ für $k \rightarrow \infty$. *Hans Heilbronn* (Cambridge).

● **Kleinsorge, Heinrich:** Zur Isomorphie zwischen Tornierschen Nullräumen und Prüferschen Ringen. (Schr. d. Math. Inst. u. d. Inst. f. Angew. Math. d. Univ. Berlin. Hrsg. v. L. Bieberbach, A. Klose, E. Schmidt, E. Tornier u. Th. Vahlen. Bd. 4, H. 3.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1938. 14 S. RM. 1.25.

Geht man vom Ring der ganzen rationalen Zahlen zum System aller verträglichen Kongruenzen nach den natürlichen Zahlen n als Moduln über, so erhält man nach H. Prüfer [Math. Ann. **94**, 198—243 (1925)] einen Ring \tilde{J} , dessen Elemente x sich eineindeutig in der Gestalt $(1) \ x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ schreiben lassen, x_i eine ganze p_i -adische Zahl, wobei p_i genau einmal alle Primzahlen durchläuft. Verf. führt in \tilde{J} die Rest-

klassen nach den natürlichen Zahlen n als Umgebungen ein. \tilde{J} wird dadurch ein topologischer Raum. Diese Topologie läßt sich auch durch folgende Metrik erzeugen: Die Elemente von \tilde{J} lassen sich umkehrbar eindeutig den Folgen $\{a_i\}$ von natürlichen Zahlen zuordnen, für die $0 \leq a_i < i$ gilt und für die aus j/i stets $a_j \equiv a_i \pmod{j}$ folgt. Der Abstand zweier solcher Folgen $\{a_i\}$ und $\{b_i\}$ ist $1/n$, wenn $a_i = b_i$ für $1 \leq i < n-1$, $a_n \neq b_n$ ist. \tilde{J} ist damit als Bairescher Nullraum erkannt. Sind zwei Elemente x, y aus \tilde{J} in der Form (1) dargestellt, so wird ihr Abstand gleich $\max_i \frac{1}{p_i} |x_i - y_i|_{p_i}$, wobei $|x_i - y_i|_{p_i}$ den p_i -adischen Betrag von $x_i - y_i$ bedeutet. Verf. führt dann nach dem Vorbild von W. Feller und E. Tornier (dies. Zbl. 5, 199) die obigen Umgebungen als Grundmengen ein und baut darauf in \tilde{J} eine Inhalts- und Maßtheorie auf. Köthe.

Rédei, Ladislaus: Einige Mittelwertfragen in bezug auf die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper. Mat. természett. Értes. 57, Tl 1, 88—102 u. deutsch. Zusammenfassung 103—104 (1938) [Ungarisch].

Es bedeute $R(\sqrt{D})$ einen quadratischen Zahlkörper, dessen Diskriminante D genau t verschiedene Primzahlen enthält. Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten in der absoluten Klassengruppe des Körpers sei e_4 ; $D(x, t)$ sei die Anzahl der $D \leq x$ und $D(x, t, e)$ die Anzahl derer mit $e_4 = e$; die Σe_4 beziehe sich auf alle $D \leq x$. Dann wird bewiesen, daß die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Sigma e_4}{D(x, t)}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x, t, e)}{D(x, t)}$$

existieren und positiv sind. Beide Werte werden durch explizite Formeln dargestellt.

Otto Szász (Cincinnati, Ohio).

Weissinger, Johannes: Theorie der Divisorenkongruenzen. Abh. math. Semin. Hansische Univ. 12, 115—126 (1938).

In einem algebraischen Funktionenkörper einer Variablen sei (\mathfrak{B}) die Differentialklasse und \mathfrak{F} ein fester ganzer Divisor. \mathfrak{A} und \mathfrak{B} seien zu \mathfrak{F} prime Divisoren. r sei der Rang aller Funktionen α , für welche $\alpha\mathfrak{A}$ ganz ist. r' sei der Rang aller α' , für welche es ein $\xi \equiv \alpha' \pmod{\mathfrak{F}}$ gibt, so daß $\alpha'\mathfrak{A}$ und $\xi\mathfrak{B}$ ganz ist. $r - r'$ hängt außer von \mathfrak{F} nur von den Klassen (\mathfrak{A}) und (\mathfrak{B}) ab und werde mit $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ bezeichnet. Unter Benutzung von Normalbasen beweist der Verf. eine bedeutungsvolle Erweiterung zum Riemann-Rochschen Satz, nämlich die Beziehung $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\} = \{\mathfrak{F}\mathfrak{B}\mathfrak{B}^{-1}, \mathfrak{F}\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}\}$. — Es ergibt sich folgende Anwendung für den Fall eines Konstantenkörpers von q Elementen. $\chi \neq 1$ sei ein Divisorencharakter mit dem Führer \mathfrak{F} . $\sum \chi(\alpha\mathfrak{A})$ erstreckt über alle α mit ganzem $\alpha\mathfrak{A}$ werde mit $W(\chi, \mathfrak{A})$ bezeichnet. Dann ist der Ausdruck

$$q^{-\dim \mathfrak{A}} W(\chi, \mathfrak{A}) W(\bar{\chi}, \mathfrak{F}\mathfrak{B}\mathfrak{B}^{-1})$$

gegen Vertauschung von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} invariant. Daraus folgt durch einfache Umformung die Funktionalgleichung für L -Reihen:

$$L(1-s, \chi) = W(\chi, \mathfrak{F}\mathfrak{B}) q^{(s-1) \dim \mathfrak{F}\mathfrak{B}} L(s, \bar{\chi}).$$

Ernst Witt (Hamburg).

Titchmarsh, E. C.: On $\zeta(s)$ and $\pi(x)$. Quart. J. Math., Oxford Ser. 9, 97—108 (1938).

Let $f(x) = ax^{n+1} + a_0x^n + \dots + a_n$, where a, a_0, \dots, a_n are real. The author proves by an argument of the Vinogradoff type (see this Zbl. 14, 204) that, if $2(n+1)|a|P \leq 1$,

$$\sum_{x=1}^P e^{2\pi i f(x)} = O(nP^{1-\varrho}) + O\left(|a|^{-\frac{1}{n}}\right),$$

where $\varrho = \frac{A}{n^4 \log^2 n}$ and A is a positive absolute constant. As an application of this inequality it is proved that in the region $\sigma > 1 - K(\log t)^{-\frac{1}{2}-\delta}$, $t > t_0$, the Riemann zeta function $\zeta(s) = O(\log^k t)$ and also $\zeta(s)$ has no zeros in this region. It is noted

that this last property of $\zeta(s)$ implies $\pi(x) = \text{li } x + O(xe^{-\omega(x)})$, where $\omega(x) = K(\log x)^{\frac{1}{2}-\epsilon}$. These results are slightly better than those of Tchudakoff (Zbl. 13, 200 and 346). It is also proved that $\zeta(1+it) = O\{\log t\}^{\frac{1}{2}+\epsilon}$. *H. S. A. Potter (Aberdeen).*

Titchmarsh, E. C.: The approximate functional equation for $\zeta^2(s)$. *Quart. J. Math., Oxford Ser. 9*, 109—114 (1938).

A new and more direct proof is given of Hardy and Littlewood's result [*Proc. London Math. Soc. (2)* 29, 81—97 (1929)] that, if $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{2}$, $x > A$, $y > A$, $xy = (t/2\pi)^2$, then

$$\zeta^2(s) = \sum_{n \leq x} d(n)n^{-s} + \chi^2(s) \sum_{n \leq y} d(n)n^{s-1} + O(x^{1-\sigma} \log |t|),$$

where $\zeta(s)$ is Riemann's zeta function, $d(n)$ is the number of divisors of n and $\chi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{1}{2} s \pi \Gamma(1-s)$. *H. S. A. Potter (Aberdeen).*

Vinogradov, I.: A new estimation of a trigonometrical sum containing primes. *Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. Nr 1*, 1—13 u. engl. Zusammenfassung 14 (1938) [Russisch].

If k is a positive integer and $f(x) = \alpha x^n + \dots + \alpha_n$ is a real polynomial with $\theta = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a, q) = 1$, $-1 \leq \theta \leq 1$, then

$$\left| \sum_{p \leq N} e(kf(p)) \right| < cN \left(kU^{-\frac{1}{4n+4}} \right)^{2-2n}, \quad U = \min \left(N^{\frac{1}{3}}, q, \frac{N^n}{q} \right) \geq (\log N)^{(2n+1)2^{\epsilon}n-2},$$

where $e(x) = e^{2\pi i x}$ and c depends only on n . The case $n = 1$ (in a more precise form) has already been discussed in detail by the author (this Zbl. 17, 389). The general case is treated similarly except that the sums $\sum_{x=1}^{N_1} e(kf(lx))$ and $\sum_{d,m} e(kf(ldm))$ which now arise are more difficult to estimate. For a detailed discussion of these sums, based on Weyl's inequalities, reference is made to another paper by the author (this Zbl. 18, 52). *Ingham (Cambridge).*

Vinogradov, I.: Improvement of the estimation of a trigonometrical sum containing primes. *Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. Nr 1*, 15—23 u. engl. Zusammenfassung 23—24 (1938) [Russisch].

It is proved that, if $k > 0$ and $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $q > 0$, $(a, q) = 1$, $-1 \leq \theta \leq 1$ (k, a, q integers), then

$$\left| \sum_{p \leq N} e(\alpha k p) \right| < cN^{1+\epsilon} \left(N^{-\frac{1}{2}} + \frac{q}{N} + \frac{k}{q} + \frac{k^4}{q^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad [e(x) = e^{2\pi i x}] \quad (1)$$

where $\epsilon > 0$, $c = c(\epsilon)$. This is a further improvement of the author's previous estimates of the sum on the left (see particularly this Zbl. 17, 389—390). The main lines of the argument are the same as before, the improvement being effected by a different treatment of sums of the type $\sum_{nxy \leq N} e(\alpha knxy)$, where n, x, y range over certain sets

of positive integers (each independently of the values of the other variables, apart from the condition $nxy \leq N$). Previously this sum was written as $\sum_n \sum_{x,y} e(\alpha knxy)$ and the author's lemma on double trigonometrical sums was applied to each $\sum_{x,y}$. Here it is written as $\sum_{xz \leq N} \varphi(z) e(\alpha kxz)$, where $\varphi(z) = \sum_{ny=z} 1 \leq d(z) = O(z^{\epsilon})$, and a slightly extended form of the lemma is applied to $\sum_{x,z}$. — As an application of (1) it is stated that, if T is the number of $p \leq N$ for which $0 \leq \alpha p - [\alpha p] \leq \delta (\leq 1)$, then

$$|T - \delta \pi(N)| < c' N^{1+\epsilon} \left(N^{-\frac{1}{2}} + \frac{q}{N} + \frac{1}{q} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad \text{Ingham.}$$

Gruppentheorie.

Miller, G. A.: Relative numbers of operators and subgroups of a finite group. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 24, 199—201 (1938).

Eine Untersuchung darüber, in welchen endlichen Gruppen die Anzahl der Untergruppen größer als die der Elemente ist. Dies ist insbesondere für die symmetrischen Gruppen von einem Grade > 3 der Fall. Magnus (Frankfurt a. M.).

Miller, G. A.: Minimum degree of substitutions of highest degree in a group. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 24, 202—204 (1938).

In einer Permutationsgruppe G vom Grade n mit k transitiven Bestandteilen gibt es mindestens eine Permutation, deren Grad (= Anzahl der versetzten Symbole) größer als $n - k$ ist, da im Mittel $n - k$ Symbole von den Substitutionen von G versetzt werden und die Identität kein Symbol versetzt. Daher muß der größte Grad einer Permutation aus G mindestens gleich $n/2 + 1$ sein; ist er genau gleich dieser Zahl, so hat n die Form $2^{m+1} - 2$, und es gibt genau eine Gruppe G vom Grade $n = 2^{m+1} - 2$ mit dieser Eigenschaft. Magnus (Frankfurt a. M.).

Yamada, Kaneo: Über Gruppen mit Basen. Tôhoku Math. J. 44, 406—409 (1938).

Es seien A_1, \dots, A_r Elemente der Gruppe G . Jedes Element von G sei auf genau eine Weise als ein Produkt $A_1^{x_1} \dots A_r^{x_r}$ mit $1 \leq x_\rho \leq n_\rho$ ($\rho = 1, \dots, r$) darstellbar, wobei n_ρ die Ordnung von A_ρ ist. Zu beliebigen ganzen Zahlen h, k gebe es weitere ganze Zahlen l, m , so daß $A_\rho^h A_\sigma^k = A_\sigma^l A_\rho^m$ und zugleich $A_\sigma^h A_\rho^k = A_\rho^m A_\sigma^l$ ist. Dann ist G auflösbar, und falls die Ordnung von G ungerade ist ist G abelsch. Magnus.

Thrall, Robert M.: Metabelian groups and trilinear forms. Amer. J. Math. 60, 383—415 (1938).

Im Anschluß an H. R. Brahana (dies. Zbl. 12, 154) werden metabelsche Gruppen G behandelt, in denen jedes Element außer der Identität die Ordnung p hat, die ferner von einer maximalen invarianten abelschen Untergruppe H und m unabhängigen vertauschbaren Elementen u_1, \dots, u_m erzeugt wird. Ohne wesentliche Einschränkung kann angenommen werden, daß das Zentrum mit der Kommutatorgruppe K übereinstimmt. Es sei $K = \{r_1, \dots, r_l\}$, $H = \{S, K\}$, $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ mit unabhängigen r_1, \dots, r_l und s_1, \dots, s_k ; ferner sei $U = \{u_1, \dots, u_m\}$. Jedem derartigen G wurde von Brahana eine trilineare Form $F = \sum a_{hij} x_h y_i z_j$ mit Koeffizienten im Galoisfeld $GF(p)$ zugeordnet, und jede solche Form bestimmt umgekehrt eine Gruppe G . Dabei entspricht einer Einführung neuer Erzeugenden in U bzw. in S oder K einer linearen Transformation der y_i bzw. der x_h oder der z_j . Ferner bleibt G ungeändert, wenn S und U , d. h. die z_j und x_h vertauscht werden. Zwei Formen F_1 und F_2 heißen τ -äquivalent, wenn sie durch derartige Transformationen ineinander übergeführt werden können; alle Formen verteilen sich dann auf τ -Klassen. Jedem G entspricht ein System von τ -Klassen, wobei die verschiedenen G zugeordneten Klassen den verschiedenen Möglichkeiten S und U zu wählen entsprechen. Es werden die τ -Klassen und die zugehörigen Gruppen G diskutiert, insbesondere in den Fällen $k = 3$, $m = 3$; $l \leq 3$, womit zufolge einer Reziprozitätseigenschaft dann auch die Fälle $l = 9, 8, 7, 6$ mitbehandelt sind; nach Brahana ist $l \leq mk$. R. Brauer.

Kořinek, Vladimír: Correction concernant l'article: „Sur la décomposition d'un groupe en produit direct des sousgroupes“, publié dans ce Journal t. 66, p. 261—286. Čas. mat. fys. 67, 209—210 (1938).

Richtigstellung des (in dem Referat, dies. Zbl. 16, 350, nicht erwähnten) Hilfssatzes 2,2 über die Beziehungen zwischen homomorphen Abbildungen und direkten Zerlegungen einer Gruppe. Die Hauptresultate der Arbeit werden hiervon nicht beeinflusst. Magnus (Frankfurt a. M.).

Murnaghan, F. D.: The generalized Clebsch-Gordan formula. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 24, 182—184 (1938).

Ist \mathcal{G} die Gruppe aller linearen Transformationen eines festen Grades n mit nicht-verschwindender Determinante, so liefern die m -ten Potenztransformationen eine Dar-

stellung $D(m)$ von \mathcal{G} . Dann kann man das Kroneckersche Produkt $D(m_1) \times D(m_2)$ durch die irreduziblen Darstellungen von \mathcal{G} ausdrücken. Verf. gibt die diesbezüglichen Formeln ohne Beweis. Ist \mathcal{G} jetzt die orthogonale Gruppe in n Dimensionen, so zerfällt $D(m)$ in $D(m-2)$ und eine irreduzible Darstellung $\bar{D}(m)$. Dann wird ebenfalls ohne Beweis die Zerlegung von $\bar{D}(m_1) \times \bar{D}(m_2)$ in irreduzible Darstellungen der orthogonalen Gruppe gegeben. — Die Beweise können aus der Darstellungstheorie der fraglichen Gruppen erhalten werden.
R. Brauer (Toronto).

Turing, A. M.: The extensions of a group. *Compositio Math.* 5, 357—367 (1938).

Man kann das Gruppenerweiterungsproblem folgendermaßen formulieren: Gegeben sind eine Gruppe N , eine Gruppe Q und ein Homomorphismus H von Q in die Gruppe aller Automorphismenklassen von N ; gesucht sind alle Gruppen G mit folgenden Eigenschaften: N ist ein Normalteiler von G und es existiert ein Isomorphismus von Q auf G/N , so daß die dem Element q aus Q entsprechende Klasse von G/N in N genau die Automorphismenklasse $H(q)$ induziert. Zur Lösung dieses Problems kann man eine freie Gruppe F , einen Homomorphismus f von F auf Q und einen Homomorphismus h von F in die Gruppe der Automorphismen von N betrachten, die erfüllen: $h(x)$ liegt immer in $H(f(x))$. In Erweiterung eines — von R. Baer, *Math. Z.* 38, 375 bis 416 (1934); dies. Zbl. 9, 11 — für abelsches N bewiesenen Resultats wird gezeigt, daß alles von der Existenz gewisse Bedingungen erfüllender Homomorphismen der — von f auf 1 abgebildeten — Untergruppe R von F in N abhängt. Diese Bedingungen werden mit Reidemeisters [Hamburger Abh. 5, 8—23 (1926)] Theorie der Relationen zwischen Relationen in Verbindung gesetzt; eine andere Bedingung besteht in der Existenz geeigneter Abbildungen der Untergruppe R von F ins Zentrum von N (vgl. hierzu auch M. Hall, dies. Zbl. 18, 145).
Reinhold Baer (Chapel Hill, N. C.).

Kulakoff, A.: Über die reguläre Darstellung einer abstrakten Gruppe. III. *Rec. math. Moscou* 3, 187—189 (1938).

Verschärfungen von früher (s. dies. Zbl. 17, 155; 18, 10) gefundenen Sätzen des Autors.
Magnus (Frankfurt a. M.).

Dietzmann, A. P., Alexander Kurosch und A. I. Uzkow: Sylowsche Untergruppen von unendlichen Gruppen. *Rec. math. Moscou* 3, 179—184 (1938).

Eine p -Untergruppe einer beliebigen Gruppe G wird definiert als eine Untergruppe, deren sämtliche Elemente endliche Ordnungen besitzen, die Potenzen der Primzahl p sind. Eine p -Untergruppe P heißt sylowsche p -Untergruppe, wenn sie nicht echte Untergruppe einer anderen p -Untergruppe von G ist. Es gibt stets sylowsche p -Untergruppen von G ; diese brauchen jedoch nicht (wie bei endlichen Gruppen) konjugiert in G zu sein. Es gilt: Besitzt der Normalisator N der sylowschen p -Untergruppe P einen endlichen Index j in G , so enthält G genau j sylowsche p -Untergruppen; diese sind miteinander konjugiert, und es ist $j \equiv 1 \pmod{p}$. — Besitzt G nur endlich viele sylowsche p -Untergruppen, so sind diese in G konjugiert, und ihre Anzahl ist $\equiv 1 \pmod{p}$. — Erzeugen endlich viele Elemente von G stets eine endliche Untergruppe, und ist eine sylowsche p -Untergruppe P endlich, so sind es alle, und alle sind mit P in G konjugiert.
Magnus (Frankfurt a. M.).

Freudenthal, Hans: Die Haarschen Orthogonalsysteme von Gruppencharakteren im Lichte der Pontrjaginschen Dualitätstheorie. *Compositio Math.* 5, 354—356 (1938).

In this note Freudenthal points out that both Haar's original theory of characters for Abelian groups [*Math. Z.* 33, 129—159 (1931); this Zbl. 1, 55] and Nagy's revision and amplification of it [*Math. Ann.* 114, 373—384 (1937); this Zbl. 16, 350], are essentially contained in Pontrjagin's later general theory [*Ann. of Math.* 35, 361—389 (1934); this Zbl. 9, 156] of the duality between countable and compact Abelian groups. F. summarizes the main results of Haar's theory in five elegantly stated theorems.

Garrett Birkhoff (Cambridge, U.S.A.).

● **Potron:** Les groupes de Lie. *Mém. Sci. math. Fasc.* 81, 64 pag. (1936).

Yosida, Kôsaku: A note on the differentiability of the topological group. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. 20, 6—10 (1938).

The author proves that a multiplicative subgroup of a complete metric ring is a Lie group if it is complete and differentiable, i.e. it has a finite number of linearly independent infinitesimal generators under these conditions. The result, which eliminates a finiteness assumption from earlier work of the author, depends upon the use of v. Neumann's definition of differentiability. The author proves an analogous result for group-germs of analytical transformations in euclidean space. *M. H. Stone.*

Yosida, Kôsaku: On the group embedded in the metrical complete ring. II. *Jap. J. Math.* 13, 459—472 (1937).

The author presents a proof of the following theorem: Let \mathfrak{G} be a locally bicomcompact, connected topological group, and let \mathfrak{D} be a continuous representation of \mathfrak{G} in a complete metric ring. Then \mathfrak{G} satisfies Hausdorff's first axiom of countability; and \mathfrak{D} is a Lie representation (i.e. can be built up from a finite number of linearly independent infinitesimal generators in an appropriate manner) but is not necessarily a Lie group (i.e. the relation to the infinitesimal generators need not include certain continuity properties). The proof of the nature of \mathfrak{D} rests on the construction of one-parameter continuous subgroups in \mathfrak{G} , and the expression of their correspondents in \mathfrak{D} in the form $\exp(tU)$ by a theorem of Nathan and Nagumo. (I. see this *Zbl.* 15, 244.)

M. H. Stone (Cambridge, Mass.).

Griffiths, L. W.: On hypergroups, multigroups, and product systems. *Amer. J. Math.* 60, 345—354 (1938).

Es werden Systeme von Mengen gleicher und verschiedener Elemente aus einer Menge betrachtet, die hinsichtlich einer kommutativen und assoziativen Mengenaddition und hinsichtlich einer eindeutigen und mit der Addition distributiven Multiplikation abgeschlossen sind. In dieses Rahmenwerk werden die Verallgemeinerungen des Gruppenbegriffs von Marty, Ore und Wall eingeordnet und die Beziehung der in Frage kommenden Axiome untereinander wird erörtert.

Reinhold Baer.

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Tarski, Alfred: Drei Überdeckungssätze der allgemeinen Mengenlehre. *Fundam. Math.* 30, 132—155 (1938).

Ulam (*Fundam. Math.* 16, 145) has proved a covering theorem in general set theory which was later generalized by Sierpiński (*Zbl.* 7, 152). Still more general theorems of this nature are here considered and proved. — The concept of weak and strong accessibility of cardinals is defined. The most direct generalization of the Ulam-Sierpiński theorem is as follows. Let m be any cardinal number, N a set, and S a set system satisfying the following conditions (1) the power of N is strongly accessible from m , (2) each system of non-vacuous pairwise disjoint sets in $\text{Pt}(N) - S$ has a power $\leq m$ [$\text{Pt}(N)$ = class of all subsets of N], (3) S covers N . Under these hypotheses there is a system M in S of power $\leq m$ which covers N . Other theorems of this type are obtained by varying the hypothesis or the conclusion somewhat, for instance by replacing strong accessibility by weak accessibility while at the same time strengthening the condition (2) by requiring that such families be finite.

Montgomery (Northampton).

Tarski, Alfred: Ein Überdeckungssatz für endliche Mengen nebst einigen Bemerkungen über die Definitionen der Endlichkeit. *Fundam. Math.* 30, 156—163 (1938).

Tarski has proved covering theorems concerned primarily with infinite sets (see preceding review). He here proves such a theorem for finite sets. Let m be a cardinal number, N a set, and S a set system satisfying the following conditions (1) N is finite, (2) each system of pairwise disjoint sets in $\text{Pt}(N) - S$ has a power $\leq m$, (3) S covers N .

Under these conditions there is a system in S which covers N and whose power is less than $2m + 1$. This theorem is followed by remarks concerning definitions of finite sets.

Montgomery (Northampton).

Rothberger, Fritz: Eine Äquivalenz zwischen der Kontinuumshypothese und der Existenz der Lusinschen und Sierpifskischen Mengen. *Fundam. Math.* 30, 215—217 (1938).

A set has property L if each nowhere dense subset is enumerable; a set has property S if each subset of measure zero is enumerable. It is known that the continuum hypothesis implies the existence of linear sets of the power of the continuum with these properties. The author shows, conversely, that the existence of such sets with the power of the continuum implies the continuum hypothesis. *Montgomery*.

Keldyeh, Ludmila: Sur une propriété des cribles dénombrables mesurables B . *Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math.* Nr 1, 125—133 u. franz. Zusammenfassung 133—135 (1938) [Russisch].

Konstruierbarkeit borelscher Mengen E von beliebiger Klasse α mit Hilfe von bestimmenden Systemen („systèmes déterminants“) besonderer Art, die durch eine Reihe von Hilfsbegriffen, wie Kamm, Kammsieb, nichtleere Kammsiebkette usw., definiert werden. Analogie dieser Konstruktionsart zur Bildungsweise des Baireschen Raumes aller irrationalen Zahlen aus dessen Intervallen bzw. Portionen. Sich daraus ergebende Übertragung der Begriffe der deskriptiven Theorie der Teilmengen dieses Raumes auf Teilmengen von E in bezug auf ein gegebenes E bestimmendes System. Hauptergebnis: Ist E von der Klasse α , so ist eine Teilmenge T von E selbst von der Klasse $\leq \alpha$ dann und nur dann, wenn die Klasse von T in bezug auf mindestens ein E bestimmendes System 1 bzw. 2 (je nachdem α eine Limeszahl bzw. keine solche ist) nicht überschreitet. — Sinnwidrige Bezeichnungen, z. B. der Rechtecke mit Dreieckszeichen, erschweren das Lesen.

B. Knaster (Warszawa).

Szpilrajn, Edward: On the equivalence of some classes of sets. *Fundam. Math.* 30, 235—241 (1938).

A class of sets in one space is said to be equivalent to a class of sets in a second space if there is a one-one transformation between the spaces carrying the first class into the second. If this transformation is a generalized homeomorphism the classes of sets are called B -equivalent. Several theorems concerning equivalence and B equivalence are demonstrated. It is shown for example that the class of sets of measure zero in a linear interval is not B -equivalent to the class of sets of the first category in the same interval.

Montgomery (Northampton, Mass.).

Tarski, Alfred: Über das absolute Maß linearer Punktmengen. *Fundam. Math.* 30, 218—234 (1938).

The definition of absolute measure is based on the notions of elementary geometry: congruence of sets and equivalence by decomposition. In what follows all the sets considered are supposed linear and bounded. Two such sets are said to be congruent if one of them is a transform of the other under a translation or a symmetry. Further, two sets A and B are equivalent by decomposition, in symbols $A \equiv B$, if $A = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $B = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$, where $\{X_i\}$, as well $\{Y_i\}$, are finite systems of disjoint sets and where X_i is congruent with Y_i for $i = 1, 2, \dots, n$. Given a set A , the lower bound of the lengths of all the segments each of which contains a set equivalent by decomposition to A , is called outer absolute measure $a_e(A)$ of A . The definition of inner absolute measure $a_i(A)$ is symmetric, and if $a_i(A) = a_e(A)$, the set A is called absolutely measurable and the number $a(A) = a_i(A) = a_e(A)$ its absolute measure. The author establishes a series of properties of absolute measure, e.g.: (1) If A and B are disjoint and absolutely measurable, then $a(A + B) = a(A) + a(B)$; (2) any set may be represented as the sum of an enumerable sequence of disjoint sets of absolute measure zero; (3) in order that a set A should be of absolute measure zero, it is necessary and sufficient that there should exist a sequence of disjoint sets

$A_i \equiv A$ such that the set $A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$ is bounded; (4) any set of the power less than continuum is of absolute measure zero. — The author introduces the notion of measure-function which, in a certain sense, embraces absolute measure, as well ordinary measures of Peano-Jordan and of Lebesgue. Thus, a non-negative function of sets f is said to be a measure-function (for all bounded sets), if: (I) $f(E) = 1$, where E denotes the interval $[0, 1]$, (II) given two finite sequence X_1, \dots, X_n and Y_1, \dots, Y_p of sets such that $X_i \equiv X'_i$, $Y_i \equiv Y'_i$ where X'_1, \dots, X'_n and Y'_1, \dots, Y'_p are two systems of disjoint sets, we have $f(X_1) + \dots + f(X_n) \leq f(Y_1) + \dots + f(Y_p)$. The author proves that for any set A the outer absolute measure of A is the greatest, and the inner absolute measure the smallest, of all the numbers $f(A)$ where f is an arbitrary measure-function. — The proofs are related to the theorems of Banach, König, Lindenbaum and the author on general transformations of sets. Those theorems (some of which are rather deep) are collected in the first section of the paper.

Saks (Warszawa).

Analysis.

Baidaff, Bernardo I.: Arithmetische (d. h. klassische) und geometrische (d. h. neue) Differentialquotienten. Bol. mat. 11, 5—12 (1938) [Spanisch].

Ersetzt man den „arithmetischen“ Zuwachs $x_2 - x_1$ durch den „geometrischen“ x_2/x_1 und bildet den Bau des Differentialquotienten nach, so kommt man zu dem neuen oder geometrischen Differentialquotienten. Sein Ausdruck in der „klassischen“ Theorie lautet: $\exp(y'/y)$.

L. Schruka (Wien).

Ore, Oystein: On functions with bounded derivatives. Trans. Amer. Math. Soc. 43, 321—326 (1938).

Let the function $f(x)$ have all derivatives up to the $(n+1)^{\text{st}}$ inclus. in the finite interval (a, b) . Denote $M_i = \max |f^{(i)}(x)|$ on (a, b) ($i = 0, 1, \dots, n+1$). The author conceived the ingenious idea of extending A. Markoff's inequality for M_1 , $f(x) \equiv f_n(x)$ — polynomial of degree n , to differentiable functions in general, by considering Markoff's bound as expressing M_1 in terms of M_0 and M_{n+1} ($\equiv 0$ for $f_n(x)$). Use Taylor's formula for $f(x+h)$, with the remainder R_n in form of a definite integral, and apply Markoff's inequality to the polynomial in h :

$$P(h) = f(x) + h'f'(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \equiv f(x+h) - R_n.$$

Furthermore, an application of W. Markoff's inequality for M_i for polynomials yields the general result, namely:

$$M_i \leq \left(\frac{2}{b-a} \right)^i \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2) \dots (n^2-(i-1)^2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1)} \left[M_0 + M_{n+1} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right].$$

[The author raises the question: what are the necessary and sufficient conditions that a given sequence of positive constants $A_0, A_1, \dots, A_i, \dots$ be the above M_i for a function $f(x)$ in an interval.] The same Taylor's formula, combined with a repeated application of Bernstein's theorem (equivalent, for polynomials in the complex domain, of Markoff's inequality) enables the author to treat analytic functions. Thus, if $f(z)$ is analytic on the unit-circle, where $|f(z)| \leq M_0$, $|f^{(n+1)}(z)| \leq M_{n+1}$, then on the same circle

$$|f^{(i)}(z)| \leq \frac{n!}{(n-i)!} \left(M_0 + \frac{2^{n+1}}{n!} M_{n+1} \right). \quad J. Shohat.$$

Schaeffer, A. C., and R. J. Duffin: On some inequalities of S. Bernstein and W. Markoff for derivatives of polynomials. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 289—297 (1938).

The following important result is obtained. Let $f(x)$ be a polynomial of degree $\leq n$, with real or complex coefficients, such that

$$|f(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (1)$$

Then, for any x on $(-1, 1)$,

$$|f^{(p)}(x)|^2 \leq \left[\frac{d^p}{dx^p} \cos n\theta \right]^2 + \left[\frac{d^p}{dx^p} \sin n\theta \right]^2, \quad (x = \cos \theta; p = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

equality attained if and only if

$$f(x) = \gamma \cos n\theta, \quad |\gamma| = 1. \quad (3)$$

For $p = 1$ we obtain a result due to S. Bernstein. (2) further leads directly to the following important inequality of W. Markoff [Math. Ann. 77, 213—258 (1916)]: (1) implies

$$|f^{(p)}(x)| \leq \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\dots(n^2-(p-1)^2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}, \quad (-1 \leq x \leq 1; p = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

equality attained at $x = \pm 1$ by the polynomial (3) only. — The proof of (2) is based upon a simple and elegant treatment of the functions $T_n(x) = \cos n\theta$, $S_n(x) = \sin n\theta$, in particular, upon the zeros and other elementary properties of the functions $T_n^{(p)}(x)$, $S_n^{(p)}(x)$, $M_p(x) \equiv [T_n^{(p)}(x)]^2 + [S_n^{(p)}(x)]^2$. Thus, an elementary treatment of these functions, which play a fundamental role in the simplest case $p = 1$ (A. Markoff), yields also the general inequality (4), which was derived by W. Markoff (l.c.) through very complicated considerations (polynomials of best approximation, elliptic functions, etc.).

J. Shohat (Philadelphia).

Wall, H. S.: On continued fractions representing constants. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 94—99 (1938).

The author considers the functionally periodic continued fraction

$$1 + \frac{\Phi_1(x_1)}{1} + \frac{\Phi_2(x_1)}{1} + \dots + \frac{\Phi_k(x_1)}{1} + \frac{\Phi_1(x_2)}{1} + \dots + \frac{\Phi_k(x_2)}{1} + \frac{\Phi_1(x_3)}{1} + \dots,$$

where the infinite sequence $\xi: x_1, x_2, \dots$, and the functions $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$ (single-valued, real or complex) are given, and studies its value as a function of ξ . Applications are given to periodic continued fractions. A special study is made of the case where the functions $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$ are polynomials.

J. Shohat (Philadelphia).

Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Risselman, W. C.: Approximation to a given function by means of polynomials in another given function. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 241—249 (1938).

This paper studies the problem of minimizing $\int_a^b |f(x) - P_n(\varphi(x))|^m dx$ ($m > 0$, given), where $f(x)$ is defined in the finite interval (a, b) and $P_n[\varphi(x)]$ is a properly chosen polynomial, of degree $\leq n$, the independent variable in the latter being another given function $\varphi(x)$. Thus, the present work is closely related — in content and methods — to that of D. Jackson on various problems of closest approximation. The author discusses the questions of existence, uniqueness and convergence ($n \rightarrow \infty$). The treatment, as stated in the Introduction, is confined to elementary cases, where $f(x)$ and $\varphi(x)$ are subject to heavy, in places, quite artificial, restrictions concerning differentiability, etc. The case of $\varphi(x)$ being monotonic is treated with more details. Here extensive use is made of the function $g(y)$ — the inverse of $y = \varphi(x)$. *Shohat.*

Jackson, Dunham: Problems of closest approximation on a two-dimensional region. Amer. J. Math. 60, 436—446 (1938).

Let

$$C_{ns} = \iint_R |f(x, y) - P_n(x, y)|^s dx dy \quad \text{or} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x, y) - T_n(x, y)|^s dx dy.$$

Here s is a given positive constant, $f(x, y)$ is a given continuous function defined in a certain region R (of period 2π in the second integral), $P_n(x, y)$, $T_n(x, y)$ denote the class of polynomials resp. trigonometric sums of degree resp. order $\leq n$ in each variable. The author studies the problem of minimizing C_{ns} , in particular, the order of magnitude of $|f(x, y) - P_n(x, y)|$, $|f(x, y) - T_n(x, y)|$ in terms of the magnitude of C_{ns} , also the problem of convergence ($n \rightarrow \infty$). The discussion follows

in the main the lines made familiar by the writer in the one-dimensional case. A proper extension of Markoff-Bernstein Theorem is the main tool used. Thus, let R be a closed region each point of which lies on two line-segments, of length $\geq h$, making an angle $\geq \gamma$ ($h, \gamma > 0$); let $P(x, y)$ denote a polynomial of degree $\leq n$ in x, y together, and let $\frac{\partial P}{\partial s}$ denote any directional derivative in R . Then

$$|P(x, y)| \leq L \text{ in } R \text{ implies } \left| \frac{\partial P}{\partial s} \right| \leq \frac{4n^2 L}{h \sin \gamma} \text{ in } R. \quad J. Shohat \text{ (Philadelphia).}$$

Menchoff, D.: Sur les séries de fonctions orthogonales bornées dans leur ensemble. Rec. math. Moscou **3**, 103—118 (1938).

Le théorème suivant remarquable est démontré: Pour toute fonction positive $w(n)$, vérifiant la condition $\lim_{n \rightarrow \infty} w(n)/(\log n)^2 = 0$, on peut déterminer un système de fonctions orthogonales bornées $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, dans leur ensemble dans $(0, 1)$ et une suite de constantes réelles c_n , $n = 1, 2, \dots$, telles que la série $\sum_1^\infty c_n \varphi_n(x)$ diverge partout dans $(0, 1)$, tandis que la série $\sum_1^\infty w(n) c_n^2$ converge. N. Obrechhoff (Sofia).

Reihen :

Lipka, Stephan: Über die Nullstellen von Potenzreihen. Mat. termézet. Értes. **57**, Tl 1, 79—86 u. deutsch. Zusammenfassung 87 (1938) [Ungarisch].

L. Onofri hat (Mem. R. Accad. Ital. **6**, 1267; dies. Zbl. **13**, 271) für eine im Einheitskreise konvergente Potenzreihe $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$ mit reellen Koeffizienten den folgenden Satz bewiesen: Ist die Folge $b_n = a_{k+n} + a_{k-n}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$; $a_\nu = 0$ für $\nu < 0$) zweifach monoton (d. h. $b_n \geq 0$, $\Delta b_n = b_n - b_{n+1} \geq 0$, $\Delta^2 b_n = \Delta b_n - \Delta b_{n+1} \geq 0$ für $n = 1, 2, \dots$) und ist außerdem $\Delta^2 b_n > 0$ für $n = 0, 1, \dots, k$, so hat $f(z)$ im Innern des Einheitskreises k Nullstellen. Verf. beweist, daß man im vorigen Satze die $k+1$ Bedingungen $\Delta^2 b_n > 0$ ($n = 0, 1, \dots, k$) durch die einzige Bedingung $\Delta^2 b_0 > 0$ ersetzen kann. Sz. Nagy (Szeged).

Erdős, Paul, und Géza Grünwald: Über einen Faberschen Satz. Ann. of Math., II. s. **39**, 257—261 (1938).

Soit $f(x)$ une fonction paire continue dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ et $U_n(f, x)$ le polynôme trigonométrique d'ordre $n-1$ admettant dans les points $x_i = 2\pi \cdot \frac{2k-1}{2n}$ les mêmes valeurs que $f(x)$. Les auteurs donnent un exemple d'une fonction $f(x)$ continue dont la série de Fourier converge uniformément et la suite $U_n(f, x)$ diverge partout. — Un théorème analogue à été donné par moi-même dans ma thèse. (Voir S. Marcinkiewicz, ce Zbl. **11**, 395.) Marcinkiewicz (Wilno).

Sz. Nagy, Béla v., und Antal Strausz: Über einen Satz von H. Bohr. Mat. termézet. Értes. **57**, Tl 1, 121—133 u. deutsch. Zusammenfassung 134—135 (1938) [Ungarisch].

Für einen Satz von H. Bohr über verallgemeinerte trigonometrische Polynome und ihre Integrale wird hier ein neuer, ganz im Reellen verlaufender Beweis gegeben, der sich auf die Fouriertransformierte stützt. Mit derselben Methode wird der Satz auf eine allgemeinere Funktionenklasse übertragen. Otto Szász (Cincinnati, Ohio).

Sunouchi, Gen-ichiro: On the Cesàro summability of the product series. Tôhoku Math. J. **44**, 421—424 (1938).

Es seien $\sum_{n=0}^\infty a_n$, $\sum_{n=0}^\infty b_n$ zwei gegebene Reihen und $S_n^{(k)}$, $T_n^{(k)}$ ihre Cesàroschen Mittel k -ter Ordnung. Ferner sei $\sum_{n=0}^\infty c_n$ ihre Cauchysche Produktreihe. Verf. beweist in Verallgemeinerung eines Satzes von Hardy [Journ. of the London Math. Soc. **2**, 169—171 (1927)]:

Ist $\sum_{n=0}^\infty a_n = A(C, \alpha)$, $\sum_{n=0}^\infty b_n = B(C, \alpha')$ mit $\alpha, \alpha' > -1$ und gilt $S_n^{(k)} = O_L(n^k)$, $T_n^{(k')} = O_L(n^{k'})$ mit $k, k' > -1$, dann ist $\sum_{n=0}^\infty c_n = AB(C, k + k' + 2)$. F. Lösch (Berlin-Adlershof).

Hadwiger, H.: Untersuchungen über das asymptotische Verhalten rekurrenter Zahlenreihen. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H. 35, 93—109 (1938).

L'au. s'occupe avec le comportement asymptotique des nombres A_n , définis par $A_n = \sum_{\lambda=1}^n \alpha_\lambda A_{n-\lambda}$ ($n \geq 1$), $A_0 = 1$, où $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ sont des nombres donnés. Sous les hypothèses; $\alpha_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = \alpha < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n > 1$, il démontre le résultat: Soit R le zéro positif de la fonction $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n - 1$. Alors on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n} = 1/R$, et si encore R est l'unique zéro de la fonction $\varphi(z)$ de module R on a $\lim_{n \rightarrow \infty} R^n A_n = 1/R \varphi'(R)$. Le réf. remarque que ce dernier résultat s'obtient tout de suite en écrivant la fonction $\varphi^{-1}(z) = \frac{K}{R-z} + \psi(z)$, où $\psi(z)$ est holomorphe pour $|z| \leq R$. *N. Obrechhoff.*

Spezielle Funktionen:

Palamà, Giuseppe: Sui polinomi di Laguerre. Boll. Un. Mat. Ital. 17, 19—26 (1938).

Continuing the work of Tricomi, the author applies Laplace Transformation $\mathcal{L}_s[F(t)] \left(= \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \right)$ to $F(x) = x^{\alpha+m} L_n^{(\alpha)}(x)$ ($\alpha + m > 0$) ($L_n^{(\alpha)}(x) \equiv$ Laguerre polynomial $\mathcal{L}_n(x, \alpha)$). An explicit expression is derived for $\mathcal{L}_s[x^{\alpha+m} L_n^{(\alpha)}(x)]$ and numerous other formulae are derived, many of which are believed to be new. To illustrate: $x L_n^{(\alpha+2)}(x) - (\alpha + 1 + x) L_n^{(\alpha+1)}(x) + (\alpha + n + 1) L_n^{(\alpha)}(x) = 0$,

$$\Delta[\alpha L_n^{(\alpha)}(x)] = (n+1) L_n^{(\alpha)}(x) + x L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x),$$

Δ representing the finite difference symbol referring to α . Of particular interest are formulae involving Δ^p, Δ^{-p} . *J. Shohat (Philadelphia).*

Watson, G. N.: A note on Gegenbauer polynomials. Quart. J. Math., Oxford Ser. 9, 128—140 (1938).

Die Gegenbauerschen Polynome $C_n^{\nu}(z)$, definiert durch die Entwicklung

$$\frac{1}{(1-2hz+h^2)^{\nu}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n C_n^{\nu}(z),$$

genügen der Differentialgleichung

$$(z^2-1) \frac{d^2 y}{dz^2} + (2\nu+1)z \frac{dy}{dz} - n(2\nu+n)y = 0. \quad (1)$$

Verf. gibt eine zweite Lösung von (1), nämlich die Funktion $D_n^{\nu}(z)$, definiert durch die Relationen

$$\begin{aligned} D_n^{\nu}(z) &= \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu+n)z^{-2\nu-n}}{2^{n+1}\Gamma(\nu+n+1)} {}_2F_1\left(\nu+\frac{1}{2}n, \nu+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}; \nu+n+1; z^{-2}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu+n)z^{-2\nu-n}}{2^{n+1}\Gamma(\nu+n+1)} {}_2F_1\left(2\nu+n, \nu+n+\frac{1}{2}; 2\nu+2n+1; \frac{2}{1-z}\right). \end{aligned}$$

($2\nu \neq 0, -1, -2, \dots$)

Er gibt rekurrente Beziehungen für $C_n^{\nu}(z)$ und $D_n^{\nu}(z)$ und beweist

$$\frac{D_n^{\nu}(z)}{\Gamma(2\nu)} = \frac{C_n^{\nu}(z) D_0^{\nu}(z)}{\Gamma(2\nu)} - \frac{1}{(z^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (\nu+n-2m-1) \frac{(1-\nu)_m (2\nu+n-m)_m}{(n-m)_{m+1} (\nu)_{m+1}} C_{n-2m-1}^{\nu}(z) \quad (2)$$

($2\nu \neq 0, -1, -2, \dots$)

$[(\alpha)_m]$ wird erklärt durch $(\alpha)_m = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+m-1)$. Mit Hilfe von (2) leitet er folgende Beziehung für verallgemeinerte hypergeometrische Funktionen ${}_pF_q$ ab:

$$\begin{aligned}
& \frac{(n-1)!}{(n-s-1)!} {}_6F_5 \left[\begin{matrix} 1, \frac{1}{2}(3-\nu-n), 1-\nu, 1-2\nu-n, \frac{1}{2}(1-n+s), \frac{1}{2}(2-n+s); \\ \frac{1}{2}(1-\nu-n), 1-n, 1+\nu, \frac{1}{2}(3-n-s-2\nu), \frac{1}{2}(2-n-s-2\nu); 1 \end{matrix} \right] \\
&= \frac{n! \nu (2\nu+n+s-1)}{(n-s)!(2\nu-1)(\nu+n-1)} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} 1, \frac{1}{2}-\nu-s, 1-2\nu, -s; \\ \frac{3}{2}-\nu, 1-2\nu-n-s, n+1-s; 1 \end{matrix} \right] \\
&- \frac{(n+s)! \nu \Gamma(2\nu-1)}{(\nu+n-1) \Gamma(2\nu+n+s-1)} \cdot \frac{(2\nu+n-s)_s (\nu+\frac{1}{2})_s}{(\frac{3}{2}-\nu)_s} \quad (3)
\end{aligned}$$

(n und s ganz ≥ 0 ; ist $s \geq n$, so ist die linke Seite von (3) gleich Null). Schließlich liefert Verf. einen zweiten Beweis von (3) mittels Transformationsformeln hypergeometrischer Funktionen.

C. S. Meijer (Groningen).

Shastri, N. A.: On some results involving Bateman's function. J. Indian Math. Soc., N. s. 3, 8—18 (1938).

The author obtains a result which may be expressed in the form

$$n \int_0^\infty e^{-x \cosh 2u} k_{2n}(x) x^{n-\frac{1}{2}} dx = -2(2 \cosh^2 u)^{-n} \Gamma(n - \frac{1}{2}) P_{2n-1}^{(1)}(\tanh u);$$

he next sums a double series involving Bessel functions and generalised Laguerre functions, expands $(2xt)^{\frac{1}{2}} e^t J_1(2\sqrt{2xt})$ in powers of t , evaluates the integral from 0 to 1 of $e^{-xt} k_{2n}(xt) P_e(1-2t)t^{-\frac{1}{2}} dt$, expresses $e^{-z} k_{2n}(z)$ as an integral involving Whittaker's function, evaluates the integral from 0 to ∞ of $k_{2n}(t) \exp(-t - t^2/x) dt$ also a similar integral with the extra factor $H_m(tx^{-\frac{1}{2}})$, he expands $k_{2m+2}(x) k_{2n+2}(x)/x$ as a series of folds of $e^{-x} k_{2n}(x)$ with powers of x and obtains a number of miscellaneous results.

H. Bateman (Pasadena).

Erdélyi, Artur: Beitrag zur Theorie der konfluenten hypergeometrischen Funktionen von mehreren Veränderlichen. S.-B. Akad. Wiss. Wien IIa 146, 431—467 (1937).

The author studies Humbert's series

$$\Phi_2(b, b'; c; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_m (b')_n}{(c)_{m+n}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}$$

and

$$\Psi_2(a; c, c'; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}}{(c)_m (c')_n} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}$$

and the corresponding series for n variables, where $(c)_0 = 1$, $(c)_n = c(c+1)\dots(c+n-1)$. For these series he obtains a great number of results of remarkable value and interest, such as addition-theorems, recurrence-formulae, integral-representations, and formulae of reduction and transformation, leading to connexions with other known functions. — When b and b' , or a , are negative whole numbers, the series terminate and represent generalisations of Laguerre's polynomials. For these he finds generating functions, shows that they satisfy a system of partial differential equations, and sums series which proceed according to products of them. — Throughout the paper, extensive use is made of the operator-calculus, in its exact form. Whittaker (Edinburgh).

Selberg, Atle: Über die Mock-Thetafunktionen siebenter Ordnung. Arch. Math. og Naturvid. 41, Nr 9, 1—15 (1938).

Die von S. Ramanujan 1920 eingeführten Mock-Thetafunktionen zeigen sich vergleichbar den elliptischen Thetafunktionen, insofern in „rationalen“ Randpunkten beide einander annähern. Während nur die 2×5 Mock-Thetafunktionen 5. Ordnung durch Identitäten verknüpft sind, fehlen solche für die 3 Mock-Thetafunktionen 7. Ordnung, von denen hier insbesondere

$$f(q) = \sum_0^\infty q^n \prod_0^{h-1} (1 - q^{h+k+1}) \quad \text{für } |q| < 1$$

betrachtet wird. Das behauptete Randverhalten für $|q| \rightarrow 1$ wird bestätigt durch Zerlegung von f in 3 Summanden.

Wilhelm Maier (Greifswald).

Petersson, Hans: Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen. V. Theorie der Poincaréschen Reihen zu den hyperbolischen Fixpunktpaaren bei beliebigen Grenzkreisgruppen. Math. Z. 44, 127—155 (1938).

III. vgl. dies. Zbl. 18, 357. Es sei Γ beliebig, $r > 2$ reell und alle Multiplikatoren vom Betrage 1. \mathfrak{Z}_s sei die Untergruppe von Γ , die die Spitze s fest läßt (wenn eine Spitze existiert), $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}$ sei die Untergruppe, die das hyperbolische Fixpunktpaar η, η' fest läßt (hyp. Fixp. existieren immer). In endlich vielen Punkten eines kanonischen F.B. seien Pole und ihre Hauptteile vorgegeben. Verf. stellt eine Verallgemeinerung der Poincaréschen Reihen auf, die nach den Elementen eines vollen Repräsentantensystems der Nebengruppen von Γ nach $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}$ fortschreiten und a. F. $\{\Gamma, -r, v\}$ mit den vorgeschriebenen Polen darstellen, die in allen Spitzen verschwinden. In Math. Ann. 103, 369 stellte Verf. ähnliche Reihen, die zu den Nebengruppen nach \mathfrak{Z}_s gehörten, auf, bewies ihre Konvergenz, die jetzt für $r > 2$ gezeigt wird, aber nur für $r > 4$. Ein Vorteil der neuen Reihen ist ihre Existenz auch bei Spitzenmangel. Verf. weist auf ihre zu erwartende Bedeutung für zahlentheoretische Untersuchungen hin.

Lochs (Kennelbach).

Braun, Hel: Zur Theorie der Modulformen n -ten Grades. Math. Ann. 115, 507—517 (1938).

Verf. behandelt Spezialfälle der von Siegel aufgewiesenen Identität zwischen gewissen Thetareihen und Eisensteinschen Reihen mit mehreren Variablen [Ann. of Math. (2) 36, Nr 3 (1935); dies. Zbl. 12, 197]. Zur Formulierung der Identität sei \mathfrak{S} die symm., m -reihige, ganzzahlige Matrix einer pos. def. quadr. Form und \mathfrak{X} eine symm., n -reihige kompl. Matrix mit pos. Imaginärteil. Weiter sei $\sigma(\mathfrak{M}) = \text{Spur von } \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}' = \text{Transponierte von } \mathfrak{M}$ und $\omega(x) = e^{\pi i x}$. Dann wird die analytische Klasseninvariante definiert durch $f(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}) = \sum \omega\{\sigma(\mathfrak{S}' \mathfrak{S} \mathfrak{X})\}$, wo über alle ganzzahligen, m -zeiligen und n -spaltigen Matrizen summiert wird. Ferner sei $E(\mathfrak{S})$ die Anzahl der ganzzahligen, linearen Transformationen von \mathfrak{S} in sich. Dann wird das Maß des Geschlechts von \mathfrak{S} definiert durch $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}) = \sum_{\mathfrak{S}_h \in \mathfrak{S}} \frac{1}{E(\mathfrak{S}_h)}$, wo \mathfrak{S}_h ein vollständiges Repräsentantensystem der

im Geschlecht von \mathfrak{S} enthaltenen Klassen durchläuft. Die analytische Geschlechtsinvariante wird erklärt durch $F(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}) = \frac{1}{\mathfrak{M}(\mathfrak{S})} \sum_{\mathfrak{S}_h \in \mathfrak{S}} \frac{f(\mathfrak{S}_h, \mathfrak{X})}{E(\mathfrak{S}_h)}$. Siegel gibt für $F(\mathfrak{S}, \mathfrak{X})$

eine Entwicklung als Eisensteinreihe an. Verf. berechnet ihre Koeffizienten für $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$, $m \equiv 0 \pmod{4}$ und bestimmt die zugehörige Untergruppe der Modulgruppe n -ten Grades. Weiter zeigt er, wie man die Klasseninvariante $f(\mathfrak{S}, \mathfrak{X})$ in einfacher Weise durch Teilwerte der Riemannschen Thetafunktion in n Variablen ausdrücken kann.

Bruno Schoeneberg (Hamburg).

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Bautin, N.: On a certain differential equation having a limiting cycle. Techn. Physics USSR 5, 229—243 (1938).

Verf. beschäftigt sich mit der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + x = \alpha \dot{x} + \beta x \dot{x} + \gamma \dot{x}^2 + \delta x^2,$$

die für die Schwingungen elektrischer Systeme von Bedeutung ist und gibt an, daß diese für gewisse Werte der Koeffizienten stabile periodische Lösungen habe. Kamke.

Adamoff, N. W.: Sur une méthode des approximations successives. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 18, 219—223 (1938).

Adamoff, N. W.: Sur la recherche des solutions périodiques d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre par la méthode des approximations successives. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 19, 17—22 (1938).

„Soit

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

une équation différentielle, où $f(x, y)$ est une fonction de x, y continue dans le domaine G

$\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ et admettant dans ce domaine une dérivée continue $\frac{\partial f}{\partial y}$. La méthode des approximations successives de Picard permet d'établir l'existence et l'unicité des solutions de l'équation (1). Ces solutions sont des fonctions continues du paramètre y_0 , qui présente la valeur de la solution pour $x = a$, et admettant une dérivée continue $\frac{\partial y}{\partial y_0}$ par rapport à la valeur initiale. On se sert ordinairement pour les approximations successives de l'opérateur

$$A[y] = y_0 + \int_a^x f(x, y) dx.$$

L'application de cet opérateur exige, en général, une restriction de l'intervalle des valeurs de x " [weil nämlich die Integralkurven wirklich nicht für das ganze Intervall $a \leq x \leq b$ zu existieren brauchen]. Verf. stellt sich die Aufgabe, einen Operator $A[y]$ anzugeben, so daß 1. $y(x)$ genau dann eine Lösung von (1) ist, wenn $y = A[y]$ ist, 2. „l'opérateur $A[y]$ a un sens dans tout l'intervalle $a \leq x \leq b$ “ [diese Forderung wird nach der vorher in Klammern gemachten Bemerkung vorsichtiger gefaßt werden müssen], ferner 3. und 4. die Einfachheit und Stetigkeit eines Feldes von Kurven $y(x)$ dieselben Eigenschaften für das Feld der $A[y]$ zur Folge hat. Ist $|f_y| < M$, $0 < h < e^{-M(b-a)}$, so hat der Operator

$$A[y(x)] = y(x) + h \int_a^x e^{M(x-a)} \{f(x, y) - y'\} dx$$

diese Eigenschaften. Das mag nach den noch nötigen Präzisierungen (s. oben) zutreffen. Aber wesentlicher wäre, daß dieser Operator auch durch wiederholte Anwendung die durch einen gegebenen Punkt gehende Integralkurve liefert, wie es bei dem Picardschen Operator der Fall ist. Davon ist jedoch keine Rede. — Für die zweite Note, in der $f(x + \omega, y) = f(x, y)$ vorausgesetzt wird, gelten dieselben Bemerkungen. Kamke (Tübingen).

Haag, J.: Étude d'une équation de Riccati. Bull. Sci. math., II. s. 62, 99—109 (1938).

Verf. betrachtet die Riccatische Differentialgleichung:

$$\frac{dZ}{ds} + s^2 + Z^m = 0,$$

wobei m der Quotient zweier positiver ungerader Zahlen ist. Die Umgebung von $Z = -\infty$ wird durch die Transformation $Z = -t^{2n}$ und $s = X/t^{2n+1}$ betrachtet. Wenn t nach Null geht, geht X nach ± 1 . Hierauf setzt Verf. $X = 1 + Y$. Verf. zeigt, daß die Integralkurven der so entstehenden Differentialgleichung eine bestimmte Asymptote haben, welche der geometrische Ort ist aller Punkte, in denen die Integralkurven eine zu OZ parallele Tangente besitzen. Hieraus ergibt sich der asymptotische Charakter sämtlicher Integralkurven. Die Ausgangsdifferentialgleichung kann durch eine geeignete Transformation auf die Form einer Besselschen Differentialgleichung gebracht werden, welche durch Besselsche Funktionen erster und zweiter Art integriert wird. Mit Hilfe dieser Funktionen betrachtet Verf. die Umgebung des Punktes $Z = -\infty$. Zum Schluß vergleicht Verf. die aus der asymptotischen Lösung der Besselschen Differentialgleichung erhaltenen asymptotischen Integrale der Ausgangsdifferentialgleichung mit der zuerst auf direktem Wege erhaltenen Form dieser Integrale. Strutt.

Chiellini, Armando: Applicazione della teoria degli invarianti differenziali lineari alla integrazione delle equazioni differenziali lineari del 4° ordine. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 8, 88—97 (1938).

Man fragt, wann eine lineare homogene Differentialgleichung 4. Ordnung für die Funktion $y(x)$ durch eine Transformation des Typus $y(x) = \lambda(x) z(x)$, $\xi = \varphi(x)$, bei passender Wahl der Funktionen λ und φ , in eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten für $z(\xi)$ überführt werden kann. Notwendige und hinreichende Bedingung

dafür ist das Verschwinden zweier gewisser mit den Koeffizienten gebildeten Ausdrücke, und die Funktionen φ, λ können dann durch Quadraturen und Derivationen allein oder, in einigen Fällen, noch durch die Integration einer Riccatischen Gleichung erhalten werden. *G. Cimmino* (Napoli).

Chiellini, Armando: Sulla effettiva riduzione di un'equazione differenziale lineare ed omogenea alla forma ridotta di Laguerre-Forsyth. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 8, 14—20 (1938).

Für die im Titel verlangte Reduktion wird ein rekurrentes Verfahren angegeben. *v. Koppenfels* (Würzburg).

Cramlet, C. M.: Linear differential equations with constant coefficients. Amer. Math. Monthly 45, 162—165 (1938).

Using the result of his preceding paper (see this Zbl. 18, 386), the author gives a method for solving systems of linear differential equations with constant coefficients in which the equations are of the form: $dx^i/dt = a_\alpha^i x^\alpha$. *Raudenbush* (New York).

Mordoukhay-Boltovskoy, D.: Sur la résolution des équations différentielles de premier ordre en forme finie. Rend. Circ. mat. Palermo 61, 49—72 (1937).

By generalizing the Liouville classification, the author gives an elegant treatment of the problem of the solvability of the differential equation: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, in finite terms, combining into one the common parts of the work in the three cases in which the solution $y = \omega(x, C)$ is expressed in terms of quadratures, elementary functions and Abelian integrals respectively. *Raudenbush* (New York).

Cartan, Élie: Les espaces généralisés et l'intégration de certaines classes d'équations différentielles. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1689—1693 (1938).

Existiert zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen n -ter Ordnung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

eine im Lieschen Sinne unendliche Gruppe G derart, daß die Differentialinvarianten einer Gleichung dieses Systems (gegenüber G) erste Integrale dieser Gleichung darstellen, so spricht Verf. von einer Klasse (C) solcher Differentialgleichungen. Eine derartige Klasse (C) tritt bereits in der Theorie zweier partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei unabhängigen und einer abhängigen Variablen auf. Eine weitere solche Klasse (C) erhält man z. B. aus der von K. Wünschmann studierten Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' = F(x, y, y', y''),$$

wofern man den Parametern a^i und $a^3 + da^i$ je zweier ihrer Integralkurven die quadratische Mongesche Berührungsbedingung

$$\Phi(a^1, a^2, a^3, da^1, da^2, da^3) = 0$$

vorschreibt und die entsprechende Bedingung für F aufgestellt. Aus diesem Sachverhalt ergibt sich eine weitere differentialgeometrisch bemerkenswerte Beziehung, sofern bekanntlich jeder quadratischen Mongeschen Differentialgleichung ein Raum E von konformem Normalzusammenhang assoziiert werden kann. Vermöge G äquivalenten Differentialgleichungen entsprechen in diesem Falle Räume von gleicher geometrischer Struktur und umgekehrt! Diese Beziehungen übertragen sich naturgemäß auch auf die Differentialinvarianten von E bzw. (C). Insbesondere gewinnt Verf. bei dieser Gelegenheit nach der Methode „du repère mobile“ die Krümmung einer binären quadratischen Differentialform, die in gegebener Weise aus einer ternären quadratischen Differentialform hervorgegangen ist. Auch die Theorie der zu einer gegebenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 v}{du^2} = \Phi\left(u, v, \frac{dv}{du}\right) \quad \left(\Phi \text{ kubisches Polynom in } \frac{dv}{du}\right)$$

gehörigen dualistischen Gleichungen führt auf eine Klasse (C). Hier ist die differential-

geometrische Beziehung durch einen (zweidimensionalen) Raum von projektivem Normalzusammenhang gegeben.

M. Pinl (Prag).

Robinson, L. B.: Sur une question de priorité. Bull. Soc. Math. France 66, 79—80 (1938).

A la suite d'une réclamation de P. Flamant, L. B. Robinson compare ses résultats (voir ce Zbl. 15, 31, 348; 17, 165) à ceux de cet aut. [voir Rend. Circ. mat. Palermo 48 (1924)]. La parenté des recherches de Robinson et de Flamant avait été signalée par le Ref. dans ce Zbl. (voir Zbl. 17, 165, Robinson). Toute question de terminologie mise à part, il est certain que P. Flamant montra dès 1924 la différence, en ce qui concerne la détermination des solutions, entre les équations différentielles et les équations différentielles fonctionnelles des types les plus simples. Les équations de Robinson, d'un type fonctionnel plus compliqué, conduisent à de jolis exemples.

G. Valiron (Paris).

Théodoresco, N.: Les solutions élémentaires d'une classe d'équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre supérieur. Comment. math. helv. 10, 164—205 (1937).

Verf. studiert die lineare partielle Differentialgleichung 4. Ordnung mit analytischen Koeffizienten

$$\sum A_{ijkl} \varphi_{x_i x_j x_k x_l} + \sum B_{ijk} \varphi_{x_i x_j x_k} + \sum C_{ij} \varphi_{x_i x_j} + \sum D_i \varphi_{x_i} + E \varphi = 0,$$

wobei er voraussetzt, die Form $\sum A_{ijkl} \pi_i \pi_j \pi_k \pi_l$ sei ins Produkt zweier reellen quadratischen Formen $\sum p_{ij} \pi_i \pi_j$, $\sum q_{ij} \pi_i \pi_j$ zerlegbar. Die Differentialgleichung wird in eine in bezug auf die Riemannsche Metrik $d\sigma^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ invariante Form umgesetzt, wobei $\|g_{\alpha\beta}\|$ die zu $\|p_{ij}\| = \|g^{\alpha\beta}\|$ adjungierte Matrix ist. Das Hauptziel der Arbeit ist die Bestimmung einer Grundlösung, welche eine Unstetigkeit gewissen Typus aufweist, ähnlich wie die Elementarlösung der hyperbolischen Gleichungen 2. Ordnung. Für die durch viele Rechnungen komplizierten Entwicklungen, die den Verf. zur Bildung dieser Lösung führen, muß auf die Originalarbeit verwiesen werden.

G. Cimmino (Napoli)

Janet, Maurice: Sur le degré de généralité de la solution de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. J. Math. pures appl., IX. s. 17, 187—195 (1938).

Gegeben ist ein System partieller Differentialgleichungen

$$A(u) + B(v) = f, \quad A^*(u) + B^*(v) = f^*,$$

wobei A, B, A^*, B^* beliebige lineare Differentialoperatoren (mit n Veränderlichen) bezeichnen. Unter der Voraussetzung, daß A, A^* erster Ordnung sind und $A(u) = A^*(u) = 0$ keine nicht identisch verschwindende Lösung besitzt, beweist Verf., daß die Maximalanzahl von unabhängigen Veränderlichen bei den in der Lösung auftretenden willkürlichen Funktionen gleich $n - 1$ ist, mit Ausnahme eines trivialen Falls, bei welchem die Lösung durch das gegebene System allein schon vollständig bestimmt ist.

G. Cimmino (Napoli).

Delsarte, Jean: Sur certaines transformations fonctionnelles relatives aux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1780—1782 (1938).

Verf. betrachtet die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a(y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + b(y) \frac{\partial f}{\partial y} + c(y) f, \quad (1)$$

$$A(r) \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + B(r) \frac{\partial F}{\partial r} + C(r) F = a(y) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + b(y) \frac{\partial F}{\partial y} + c(y) F, \quad (2)$$

$$A(r) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + B(r) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + C(r) \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad (3)$$

wobei die Funktionen a, b, c, A, B, C in gewissen Gebieten der komplexen Ebene vorgegeben und stetig sind. Er führt vier lineare Operatoren ein:

$$f(r) = \mathfrak{A}_r[\alpha(\tau)]; \quad g(r) = \mathfrak{B}_r[\beta(\tau)];$$

$$\dot{\alpha}(t) = A_t[f(q)]; \quad \dot{\beta}(t) = B_t[g(q)].$$

Er zeigt: Wenn $f(x, y)$ und $g(x, y)$ Lösungen der Differentialgl. (1) darstellen, die in einem gewissen Gebiete vorgegeben und stetig sind, so entsprechen diesen Lösungen durch die Transformationen:

$$F(r, y) = \mathfrak{A}_r[f(\xi, y)]; \quad G(r, y) = \mathfrak{B}_r[g(\xi, y)]$$

zwei Lösungen der Differentialgl. (2), welche ebenfalls in einem gewissen Gebiet stetig sind. Wenn umgekehrt $F(r, y)$ und $G(r, y)$ zwei stetige Lösungen der Gl. (2) sind, so entsprechen ihnen durch die Transformationen:

$$\dot{f}(x, y) = A_x[F(\varrho, y)]; \quad \dot{G}(x, y) = B_x[G(\varrho, y)]$$

zwei Lösungen f und g der Gl. (1). Aus diesen Lösungen können Lösungen der Gl. (3) erhalten werden. Als Beispiel erwähnt Verf. die zweidimensionale Potentialgleichung.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Caccioppoli, Renato: Sui teoremi d'esistenza di Riemann. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 7, 177—187 (1938).

Eine Methode zur Lösung der Poissonschen Gleichung (1) $\Delta_2 u = f$ auf geschlossenen Riemannschen Flächen R . Jeder Lösung von (1) wird eine Massenbelegung M_u auf R zugeordnet, welche dadurch ausgezeichnet ist, daß ihre totale Masse gleich Null ist. Die Existenz der Abelschen Integrale auf R folgt daraus. *Schauder.*

Giraud, Georges: Nouvelle extension d'un type de problèmes relatifs aux équations du type elliptique. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1157—1160 (1938).

Die früheren Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. 18, 126, zweites Ref.) über die Bestimmung der Lösungen einer linearen elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung durch die am Rande vorgegebenen Werte der Ableitungen in gewissen Richtungen (genauer Wortlaut dies. Zbl. 18, 126, zweites Ref.) und über die Zurückführung dieses Problems auf gewöhnliche Integralgleichungen werden ausgebaut und verallgemeinert; z. B. können die Randwerte Diskontinuitäten besitzen. *Schauder.*

Giraud, Georges: Sur les problèmes du type de Dirichlet. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1233—1235 (1938).

Verf. kündigt an, daß man mit den Methoden der vorstehend referierten Note auch Probleme vom Dirichletschen Typus für lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung behandeln kann. *Schauder (Lwów).*

Leray, Jean: Majoration des dérivées secondes des solutions d'un problème de Dirichlet. J. Math. pures appl., IX. s. 17, 89—104 (1938).

Sei $F(x, y, z, p, q, r, s, t)$ eine dreimal differenzierbare Funktion. Es sei z eine Lösung der elliptischen Differentialgleichung $F = 0$, für welche die Schranken für $|z|, |p|, |q|$ in einem Gebiete D , wo D' dessen Rand ist, bereits bekannt sind. Es handelt sich in dieser Arbeit (sie bildet die ausführliche Darstellung des Paragraphe 1 einer C. R. Note; vgl. dies. Zbl. 18, 65 — zweite Note) um die Abschätzung der zweiten Ableitungen unter obigen Voraussetzungen. Man bezeichne mit $A(d)$ eine Konstante, die von den bereits bekannten Schranken für $|z|, |p|, |q|$ sowie von dem Gebiete d , in welchem abgeschätzt wird, abhängt. Die fragliche Abschätzung gelingt unter folgenden Regularitätsvoraussetzungen $F = 0$

$$F_p^2 + F_q^2 + F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 + F_{p^2}^2 + \dots + F_{p^2 x}^2 + \dots \\ + F_{z^2}^2 < A(d) [F_r^2 + F_s^2 + F_t^2] [r^2 + s^2 + t^2 + 1],$$

$$F_{r^2}^2 + \dots + F_{t^2}^2 < A(d) [F_r^2 + F_s^2 + F_t^2],$$

$$F_{r^2}^2 + \dots + F_{r^2 s}^2 + \dots + F_t^2 < A(d) [F_r^2 + F_s^2 + F_t^2] [r^2 + s^2 + t^2 + 1]^{-1},$$

$$F_r^2 + F_s^2 + F_t^2 < A(d) [4F_r F_t - F_s^2].$$

Die Abschätzung ist lokaler Natur, d. h. hat d vom Rande D' eine positive Entfernung, so kommen in der Abschätzung die Randwerte nicht vor, schmiegt sich aber d mit dem Randstücke c an D' an, so müssen die Randwerte und deren Ableitungen nach s (s ein auf c laufender Parameter) in die Abschätzung einbezogen werden.

Schauder (Lwów).

Morrey jr., Charles B.: On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. 43, 126—166 (1938).

Verf. betrachtet zuerst Systeme von linearen elliptischen Differentialgleichungen erster Ordnung in zwei unabhängigen Veränderlichen der Form

$$v_x = -(b_2 u_x + c u_y + e), \quad v_y = a u_x + b_1 u_y + d, \quad 4ac - (b_1 + b_2)^2 \geq m > 0, \quad (1)$$

wobei die Koeffizienten a, b_1, b_2, c, d, e nur als meßbar und beschränkt angenommen werden. Seien R ein Jordangebiet, R^* dessen Rand, φ stetige Randwerte auf R^* , die so beschaffen sind, daß für die mit den Randwerten φ gebildete harmonische Funktion das Dirichletsche Integral endlich bleibt. Es wird die Existenz eines stetigen Funktionenpaares u, v nachgewiesen, welches (1) in R fast überall erfüllt, wobei u die Randwerte φ annimmt. Außerdem genügen in jedem abgeschlossenen Teilgebiete D von R die Funktionen u, v passenden Hölderbedingungen (sogar gewissen Integralbedingungen) und ihre Dirichletschen Integrale bleiben dort beschränkt. Die diesbezüglichen Abschätzungen hängen nur von den Schranken für die Koeffizienten a, b_1, \dots, e ab. Der Beweis beruht auf Anwendung einer verallgemeinerten konformen Abbildung und einiger anderen Hilfssätze, die auch für sich selbst von Interesse sind. Dieses Ergebnis wird nun vom Verf. zuerst dazu verwendet, um die Analytizität der Lösungen eines regulären Variationsproblems $\int \int_R f(x, y, z, p, q) dx dy$ nachzuweisen,

falls f in allen Argumenten analytisch ist und z eine Lipschitzbedingung erfüllt. Als weitere Folgerung ergibt sich ein Existenzbeweis und Abschätzung für Lösungen einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung (2) $a(x, y)r + 2b(x, y)s + c(x, y)t = d$ bei beschränkten a, b, c, d in einem Kreise Σ . Sei u eine am Rande verschwindende Lösung von (2): $|z|, |p|, |q|$ lassen sich in Σ abschätzen sowie die Hölderkonstanten von p, q in jedem abgeschlossenen Teilgebiete von Σ . Diese Abschätzungen liefern einfache Beweise für Existenztheoreme bei quasilinearen elliptischen Differentialgleichungen in gewissen Fällen (dabei sollte z. B. der Fixpunktsatz und nicht sukzessive Approximationen benutzt werden. Ref.). Schauder (Lwów).

Petrovskij, I.: Sur les systèmes d'équations différentielles dont toutes les solutions sont analytiques. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 17, 343—346 (1937).

Es wird für gewisse normale totalelliptische Systeme von Differentialgleichungen $F_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$) beliebiger Ordnungen in N unbekannten Funktionen und m unabhängigen Veränderlichen der Satz von der Analytizität der Lösungen angekündigt, falls F_i in allen Argumenten analytisch und die Lösungen genügend hoch differenzierbar sind. Sind die F_i analytisch nur in einer unabhängigen Veränderlichen x_0 , in den anderen aber nur genügend hoch differenzierbar, so wird eine entsprechende Behauptung über die Analytizität der Lösungen in x_0 aufgestellt. Ist der elliptische Charakter verletzt, so braucht der Satz über die Analytizität der Lösungen sogar im linearen Falle (konstante Koeffizienten) nicht zu bestehen. Verf. schließt mit gewissen Bemerkungen über das Cauchysche Problem für elliptische Differentialgleichungen. Schauder.

Petrovsky, I.: Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen. Rec. math. Moscou, N. s. 2, 815—868 (1937).

Verf. zeigt, daß das Cauchysche Anfangswertproblem für normale Systeme von totalhyperbolischen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung in beliebiger Anzahl der unabhängigen Variablen sich als korrekt gestellt (im Sinne von Hadamard), also lösbar, erweist. Die Arbeit ist die ausführliche Darstellung einer früheren Note, über die bereits referiert wurde (dies. Zbl. 13, 401). Die für die Eindeutigkeits- und Existenzbeweise nötigen Abschätzungen werden durch Entwicklung in Fourierreihen gewonnen; dann geht man in der üblichen Weise vor. Zuerst wird der Fall der Differentialgleichungen erster Ordnung eingehend behandelt und dann kurz der allgemeine Fall erörtert. Für nicht totalhyperbolische Systeme braucht das Cauchysche Problem keine korrekte Problemstellung zu sein. Schauder (Lwów).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Fues, E.: Zur dynamischen Theorie der Raumgitterbeugung. II. Z. Physik 109, 236—259 (1938).

Bei der Berechnung der Eigenwertflächen im Kristall geht Verf. als einfaches Beispiel von der eindimensionalen Mathieuschen Differentialgleichung aus und zeigt hieran die Verteilung der Sperrbereiche. Im Anschluß an diese Darstellung erörtert er den Fall der eindimensionalen und der zweidimensionalen Hillschen Differentialgleichung und zeigt an einer Skizze das Verhalten der Schnittkurve konstanter Frequenz der Eigenwertfläche im zweidimensionalen Raum. Hierauf studiert er die gleichzeitige Wirksamkeit mehrerer Sperrebenen, wobei zunächst wieder eine zweidimensionale Fläche zugrunde gelegt wird. Für die Übertragung in den dreidimensionalen Raum ist es wichtig, daß die Schnitte der Flächen konstanter Frequenz ohne Zuhilfenahme der vollständigen Eigenwertflächen ermittelt werden können. Endlich behandelt Verf. die Berechnung der Eigenwertfläche und ihrer Schnittfigur bei Kopplung von n Strahlen. Er geht aus von zwei Strahlen und zeigt an Figuren, wie der Fall mehrerer Strahlen zu behandeln ist. Zugleich erfolgt eine quantitative Behandlung. Zum Schluß geht Verf. auf die Beziehungen seiner Behandlungsweise mit derjenigen von v. Laue und von Ewald ein. (I. vgl. dies. Zbl. 18, 361.) *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Lewis, T.: Solutions of Oseen's extended equations for circular and elliptic cylinders and a flat plate. Quart. J. Math., Oxford Ser. 9, 21—31 (1938).

Relative to axes fixed in the cylinder the equations of steady motion are $v\omega = P_x + v\omega_y$, $u\omega = -P_y + v\omega_x$, where $\omega = v_x - u_y$, $P = p/\rho + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \Omega$. It is thought that an approximation closer than Oseen's should be found by replacing u and v on the right hand sides of these equations by values \bar{u} , \bar{v} corresponding to an irrotational motion coinciding most nearly with the actual motion and regarding $u - \bar{u}$, $v - \bar{v}$ as a small perturbation satisfying the first two equations, squares of small differences being neglected in the expression for P . The author finds \bar{u} , \bar{v} from the irrotational motion round a cylinder in a uniform stream of non-viscous fluid. He writes $u = -\alpha_x = -\beta_y$, $v = -\alpha_y = \beta_x$ and takes α , β as new variables. The new equations of motion are then $v\omega_\beta = -P_\alpha$, $\omega + v\omega_\alpha = P_\beta$ where suffixes are used to denote differentiations. In the first of these equations is satisfied by writing $\omega = U_\alpha$, $P = -vU_\beta$, U satisfies $U_\alpha + v(U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta}) = 0$ and may be written in the form $U' \exp(-\alpha/2v)$ where U' satisfies a simpler equation which is transformed to new variables by the substitution $\alpha + i\beta = -Vc \operatorname{ch}(\xi + i\eta)$. — The simple solutions of type $U' = f(\xi)g(\eta)$ depend on Mathieu functions $ce_n(\eta)$, $se_n(\eta)$, $Cek_n(\xi)$, $Sek_n(\xi)$, the first of which is normalised in a novel way. The author writes

$$C_n = e^{k \operatorname{ch} \xi \cos \eta} Cek_n(\xi) ce_n(\eta), \quad S_n = e^{k \operatorname{ch} \xi \cos \eta} Sek_n(\xi) se_n(\eta)$$

and defines a set of functions $C_{n,n+1} = C_n - C_{n+1}$ which do not give rise to infinite circulation. — The stream function $\psi = \psi_1 + \beta$ is found with the aid of the Green's function for the semi-infinite strip bounded by $\eta = 0$, $\eta = 2\pi$, $\xi = 0$. *H. Bateman*.

Moiseiev, N.: Sur le problème de la localisation des trajectoires dynamiques dans l'espace des phases. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 17, 301—304 (1937).

Some very trivial remarks on n^{th} order systems of differential equations admitting invariant n -tuple integrals. *D. C. Lewis* (Ithaca, N. Y., U. S. A.).

Agostinelli, Cataldo: Sul problema di Cauchy per un'equazione differenziale che interviene nella propagazione elettromagnetica simmetrica rispetto a un asse. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 71, 34—41 (1938).

Es handelt sich um die Gleichung

$$u_{xx} - x^{-1}u_x + u_{yy} - u_t = F(x, y, t).$$

Verf. hat in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 18, 151) eine Gleichung betrachtet, die sich von der obengenannten nur um das Vorzeichen der ersten Ableitung unterscheidet. Die hier erhaltenen Ergebnisse sind denen der erwähnten Arbeit ganz analog. *G. Cimmino*,

Hodgkinson, J.: A note on a two-dimensional problem in electrostatics. *Quart. J. Math., Oxford Ser. 9*, 5—13 (1938).

Trägt ein unendlich langer dielektrischer Zylinder eine unendlich lange leitende Schicht auf einem Teile seiner Oberfläche, so kann das zweidimensionale elektrostatische Feld mit Hilfe zweier konformer Abbildungen gelöst werden. Die erste Abbildung ist linear und verwandelt die dielektrische Kreisfläche in die obere halbe z -Ebene, mit der zweiten Abbildung $z = w^2$ erhält man eine Anordnung in der w -Ebene, die mit der Methode der elektrischen Spiegelung behandelt werden kann. Für den Fall, daß der Zylinder zwei getrennte Belegungen trägt, muß für die Abbildung die Weierstraßsche \wp -Funktion verwendet werden, um wieder auf die elektrische Spiegelungsmethode zu führen. In diesem 2. Falle werden gleiche, entgegengesetzt gleiche, und von einer Quelllinie induzierte Ladungen behandelt.

Ernst Weber (New York).

Diatchenko, V., et C. Bréous: Application des coordonnées cyclidiques à l'équation de Laplace. *J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 4*, 9—17 u. franz. Zusammenfassung 18 (1938) [Ukrainisch].

Die Verf. benutzen an Stelle der Veränderlichen z, r die Veränderliche u, v , die durch $z + ir = ia \operatorname{sn}(u + iv, k)$ gegeben sind. sn bedeutet in üblicher Weise die Jacobische elliptische Funktion. Die Koordinaten u, v bezeichnet man als zykladische Koordinaten. — Nachdem die Verf. einige Eigenschaften der Funktionen $u(z, r), v(z, r)$ aufstellen und ihr Verlauf durch ein Bild veranschaulichen, stellen sie im Falle der rotationssymmetrischen Funktionen in diesen Koordinaten die Potentialgleichung auf. Sie lautet $\psi_{uu} + \psi_{vv} + F(u)\psi = 0$, wo $F(u)$ sich mit Hilfe von elliptischen Funktionen in einer einfachen Weise ausdrücken läßt. Die Gleichung läßt sich durch Zerlegung der Veränderlichen integrieren. Setzt man $\psi = \psi_1(u)\psi_2(v)$, so genügt ψ_1 bzw. ψ_2 (nachdem man die Veränderliche $t = \operatorname{sn}^2 u$ bzw. $\tau = \operatorname{dn}^2(v, k)$ einführt) einer linearen Differentialgleichung von Fuchsschem Typus, die von einem Parameter α abhängt. Setzt man $\psi_1 = \sqrt{\operatorname{sn} u} \cdot y = t^{\frac{1}{2}} y$, so erhält man Differentialgleichungen von besonders einfacher Struktur, die für $k = 0$ in die Legendresche Differentialgleichung übergehen. Analoges gilt für ψ_2 .

Bergmann (Tiflis).

Stibitz, G. R.: Potentials in curved surfaces. *Philos. Mag., VII. s. 25*, 783—785 (1938).

Verf. bemerkt: Wenn auf einer Fläche eine Strömung existiert, die in der Richtung s die Stärke $-\rho \partial V / \partial s$ hat, wobei ρ und V Ortsfunktionen sind, und wenn der Gesamtfluß längs jeder geschlossenen Kurve verschwindet, so genügt das Potential V einer Gleichung, die man zweckmäßig in der Form

$$\sum_{i, k=1, 2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \rho \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x_k} \right\} = 0$$

schreibt.

W. Feller (Stockholm).

Riesz, Marcel: Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels. *Acta Litt. Sci. Szeged 9*, 1—42 (1938).

L'auteur étudie une série des questions sur les potentiels généralisés (exposant quelconque) en particulier newtoniens, et sur l'intégrale $\int_{\Omega} \bar{P} Q^{\alpha-m} d\mu(Q)$ qui, à un facteur près, généralise dans l'espace à m dimensions l'intégrale de Riemann-Liouville $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt$. Mentionnons l'essentiel. Du théorème d'équilibre de

Robin-Frostman (reproduit incomplètement, l'unicité demandant une condition supplémentaire, p. ex. que la distribution ne comporte pas de masses sur les ensembles de capacité nulle), l'auteur tire par une transformation de Kelvin, une certaine distribution μ_M sur tout ensemble fermé F . Lorsque F est borné c'est d'ailleurs la

distribution du balayage (de la Vallée Poussin-Frostman) du complémentaire pourvu de la masse 1 en M ; mais cela constitue justement un nouvel exposé, ultérieurement complété, du balayage (qui demande une condition supplémentaire d'unicité, p. ex. celle signalée plus haut). La fonction de Green, approfondie, est définie pour M hors F et P quelconque, par $G_M(P) = \overline{M}P^{\alpha-m} - h_M(P)$ où $h_M(P)$ est le potentiel généralisé de μ_M . Un rôle important est joué par l'expression $\int_F v(Q) d\mu_M(Q) + \int_F G_M(Q) dv(Q)$

du potentiel $v(M)$ hors F des masses v de F . Elle se réduit au premier terme si, p. ex. v est finie; et cette forme sert à définir un prolongement de fonction donnée sur F . L'étude de ce prolongement conduit à une nouvelle résolution du problème généralisé de Dirichlet-Wiener. Le dernier chapitre traite de la recherche de masses >0 dont le potentiel généralisé vaut une fonction donnée, ainsi que des conditions de possibilité. C'est une extension, rapidement indiquée, de la représentation potentiel de F. Riesz des fonctions sousharmoniques. Brelot (Bordeaux).

Frostman, Otto: Sur le balayage des masses. Acta Litt. Sci. Szeged 9, 43—51 (1938).

D'après Frostman-M. Riesz, on sait, étant donné dans l'espace à m dim., un ensemble fermé F et la masse-unité en P extérieur, trouver une distribution μ_P de masses ≥ 0 (masses de Green) sur F , conservant le potentiel généralisé d'ordre α sur F à l'exception possible d'un ensemble de capacité nulle. Il y a unicité (en ajoutant, ce qui n'est pas explicité, p. ex. que μ_P ne doit pas comporter de masses sur les ensembles de capacité nulle) et réciprocity pour deux points extérieurs P, Q (potentiel en Q de $\mu_P = \text{pot. en } P \text{ de } \mu_Q$). L'auteur étend ce balayage au cas de P sur F ; il donne une solution unique avec même conservation du potentiel et réciprocity pour P, Q quelconques (et même condition supplémentaire implicite que plus haut). L'existence s'établit en supprimant de F le voisinage de P et balayant la masse 1 en P , puis passant à la limite. La fonction de Green de F est généralisée en $G(P, Q) = \overline{P}Q^{\alpha-m} - \text{pot. en } Q \text{ de } \mu_P$, symétrique en P, Q quelconques. — Le balayage général de masses σ (à variation bornée) dans l'espace est défini par la distribution sur les ensembles e de F exprimée par $\int \mu_P(e) d\sigma(P)$ étendue à tout l'espace. — Applications à l'étude des points irréguliers.

Brelot (Bordeaux).

Privaloff, I.: Les problèmes limites de la théorie des fonctions harmoniques et sousharmoniques dans l'espace. Rec. math. Moscou 3, 3—24 u. franz. Zusammenfassung 24—25 (1938) [Russisch].

The author establishes a series of theorems on harmonic and subharmonic functions in a p -dimensional space. We shall mention the following ones: 1. Let $u(P)$ be a harmonic function in the interior of the unit sphere. Then, in order that u be representable by means of the Poisson-Stieltjes integral, it is necessary and sufficient that the mean values of u^+ over the spheres $r < 1$ be uniformly bounded; in order that u be representable by means of the Poisson-Lebesgue integral, it is necessary and sufficient that the indefinite integrals of $|u|$ on the surfaces of the spheres $r < 1$, considered as functions of sets, be equally absolutely continuous. 2. If u is a subharmonic function in the interior of the unit sphere and the mean values of u^+ over the spheres $r < 1$ are uniformly bounded, then at almost all points Q of the surface $r = 1$ of the unit sphere the function $u(P)$ has a finite limit as P approaches Q along the radius OQ ; the limit function thus obtained is summable over the surface $r = 1$.

Saks (Warszawa).

Privalov, I. I.: Différentes classes de fonctions subharmoniques considérées au point de vue de leur représentation analytique. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 18, 507—510 (1938).

L'auteur donne des résultats sur l'étude de quelques classes de fonctions sousharmoniques u dans la sphère unité (n dim.), en particulier de celle déjà considérée des fonctions u telles que l'intégrale de u^+ sur les surfaces sphériques concentriques

soit bornée. Critères d'appartenance; dans le cas harmonique auquel on se ramène, représentations analytiques (intégrales de Poisson-Stieltjes). Il s'occupe aussi des fonctions holomorphes dans le cercle unité et de leur représentation par des intégrales de Cauchy, Poisson, Cauchy-Stieltjes, Poisson-Stieltjes. *Brelot.*

Funktionentheorie:

Duffin, Richard, and A. C. Schaeffer: Some properties of functions of exponential type. *Bull. Amer. Math. Soc.* **44**, 236—240 (1938).

Let $f(z)$ ($z = x + iy$) be real on the real axis and such that $|f(z)| = O(e^{\lambda|z|})$ ($\lambda > 0$) uniformly over the entire plane, and $|f(x)| \leq 1$. The authors first prove (by means of Phragmén-Lindelöf Principle) that $|f(z)| \leq e^{\lambda|y|}$. They further apply Rouché and Hurwitz theorems to the function $f_\varepsilon(z) = \frac{\sin \lambda \varepsilon z}{\lambda \varepsilon z} (1 - \varepsilon) f[(1 - \varepsilon)z]$ ($0 < \varepsilon < 1$), and obtain their main result, namely: $\cos(\lambda z + \alpha) - f(z)$ (α real, arbitrary) has only real zeros (if not $\equiv 0$), all simple, save perhaps at real points x where $|f(x)| = 1$. An immediate application yields an upper bound for $|f'(z)|$. (S. Bernstein). Finally, they take $f(z) \equiv P(\cos z)$, where $P(x)$ is a polynomial, of degree $\leq n$, with real coefficients, such that $|P(x)| \leq 1$ ($-1 \leq x \leq 1$), and obtain an improved form of another result of Bernstein concerning an upper bound for $|P'(z)|$.

J. Shohat (Philadelphia).

Schiffer, Menahem: Sur un problème d'extrémum de la représentation conforme. *Bull. Soc. Math. France* **66**, 48—55 (1938).

If $f(\zeta) = \zeta + a_1/\zeta + a_2/\zeta^2 + \dots$ represents $|\zeta| > 1$ on a domain D the problem is to find the largest possible value of $\prod |a_i - a_j|$ for a system of n points a_i outside D . If $n = 2$ the solution is well known and in the present paper the complete solution for $n = 3$ is obtained. There is an essentially unique extremal function $\zeta(1 + 2/\zeta^3 + 1/\zeta^6)^{1/3}$. This fact is used to obtain the inequality $|a_2| \leq \frac{2}{3}$. The method adopted depends on the infinitesimal variation of the domain D and leads to a differential equation giving some information in the general case [cf. K. Löwner, *Math. Ann.* **89**, 103—121 (1923); M. Schiffer, *C. R.* **205**, 709—711 (1937); this *Zbl.* **17**, 270]. *Macintyre* (Aberdeen).

Gilman, L. S.: Sur l'application de la représentation conforme à la résolution du problème plan de la théorie de l'élasticité. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. **18**, 629—632 (1938).

Lee, Kwok Ping: Sur les valeurs multiples et les directions de Borel des fonctions méromorphes. *C. R. Acad. Sci., Paris* **206**, 1784—1786 (1938).

Procédant comme R. Nevanlinna l'a fait pour les théorèmes relatifs aux modules des zéros, l'aut. montre que les propositions relatives aux directions de Borel et aux cercles de remplissage (aussi bien pour les zéros de l'ensemble $f(z) + g(z)$ que pour ceux de $f(z) + \text{const}$) restent vraies si l'on supprime la multiplicité de tous les points multiples (chaque zéro étant donc considéré comme zéro simple), ou si l'on supprime tous les points multiples d'ordre de multiplicité supérieur à trois. On peut aussi compléter d'une manière analogue de récents théorèmes de H. Milloux (voir ce *Zbl.* **17**, 363).

G. Valiron (Paris).

Jørgensen, Vilhelm: Über den Gültigkeitsbereich des Picardschen Satzes. *Mat. Tidsskr. B* **1938**, 27—37 [Dänisch].

Jørgensen, Vilhelm: Über den Gültigkeitsbereich des Picardschen Satzes. *Math. Ann.* **115**, 710—719 (1938).

L'aut. démontre ce théorème: Toute fonction $f(s)$ de $s = \sigma + it$, holomorphe pour $\sigma \geq 0$ et bornée dans toute bande $0 \leq \sigma \leq \alpha$, appartient à l'un des trois types suivants: 1° $f(s)$ est bornée pour $\sigma \geq 0$; 2° $f(s) = e^{Ks} g(s)$ avec $K > 0$ et $0 < m \leq |g(s)| \leq M$ pour $\sigma < \sigma_0$; 3° $f(s)$ prend toute valeur sauf une au plus dans tout demi-plan $\sigma \geq \alpha$. La démonstration s'appuie sur un théorème de H. Bohr (voir ce *Zbl.* **14**, 353), sur le théorème de Phragmén-Lindelöf, sur les propriétés de la fonction modulaire et

sur la généralisation du lemme de Schwarz (Julia, Wolff, Landau et Valiron, J. London Math. Soc. 1929). L'aut. étudie ensuite les fonctions de la forme $e^g(s)$, où $g(s)$ est holomorphe pour $\sigma > 0$ et telle que $|g(s)| \geq m > 0$ pour $\sigma > \alpha > 0$. Il déduit notamment de cette étude que: si $f(s)$ est holomorphe pour $\sigma \geq 0$, si dans toute bande $0 \leq \sigma \leq \alpha$, on a $0 < m(\alpha) \leq |f(s)| \leq M(\alpha)$, et si $f(s)$ prend pour $\sigma \geq \beta$ toute valeur non nulle, il existe un nombre k tel que $|f(s)| e^{-k\sigma}$ soit borné pour $\sigma \geq 0$.
G. Valiron (Paris).

Heins, H.: Sur un théorème d'existence dans la théorie de l'interpolation. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1543—1545 (1938).

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung des Problems der Existenz einer im Einheitskreise beschränkten Funktion, für die an gewissen Stellen Werte vorgeschrieben sind, auf mehrfach zusammenhängende Existenzgebiete mit mindestens drei Randpunkten; isolierte Randpunkte können ausgeschlossen werden. Eine offenbar notwendige Bedingung kann als hinreichend erwiesen werden (was in Sonderfällen schon bekannt ist): Die hyperbolischen Abstände je zweier Bildpunkte müssen kleiner sein als die der Urbunkte. Der Beweis stützt sich auf schlichte Abbildung der universellen Überlagerungsfläche des Existenzgebiets und Nevanlinnas Prinzip vom hyperbolischen Maß (Eindeutige analyt. Funktionen, S. 45 ff. Berlin 1936). Ullrich (Gießen).

Ahlfors, Lars V.: An extension of Schwarz's lemma. Trans. Amer. Math. Soc. 43, 359—364 (1938).

Die schon einmal an wesentlicher Stelle vom Verf. benutzten Gedanken über Metrik auf Riemannschen Flächen (dies. Zbl. 17, 36) werden nunmehr auch dazu herangezogen, um einige sehr allgemeine Formen des Schwarzschen Lemmas auszusprechen, die sich über der Pickschen Differentialgestalt dieses Satzes aufbauen. Aus ihnen werden dann drei wichtige Anwendungen gezogen; der Weg ist im Grundgedanken sehr einfach und (im Sinne dieses Teiles der Funktionentheorie) elementar, d. h. er vermeidet die Benutzung von höheren uniformisierenden Transzendenten: A. Die z. Zt. besten Abschätzungen im Schottkyschen Satz: Ist $f(z)$ im Einheitskreise eindeutig analytisch und $\neq 0, 1, \infty$, so gilt für $r < 1$

$$\log |f(re^{i\varphi})| < \frac{1+r}{1-r} \{7 + \log |f(0)|\};$$

das ist noch etwas besser als das Pflugersche Ergebnis (dies. Zbl. 11, 119) und einfacher beweisbar. B. Verf. gibt zu der von ihm und Grunsky (dies. Zbl. 16, 309) kürzlich gewonnenen oberen Schätzung nun auch die beste untere Schätzung der Blochschen Konstanten. Danach weiß man jetzt

$$0,433 < \frac{1}{4}\sqrt{3} < B < 0,472.$$

C. Landaus Konstante L (entsprechend wie die Blochsche erklärt, doch nur auf den Wertevorrat ohne den Zusatz der Schlichtheit bezogen) kann ebenfalls besser als bisher geschätzt werden, wobei sich nun $L \geq \frac{1}{2}$ und daher $L > B$ ergibt, was bisher nicht bekannt war. Andererseits ist $L < 0,544$. Ullrich (Giessen).

Ciorănescu, Nicolas: Sur la représentation en suites de fonctions polyharmoniques du produit de deux fonctions analytiques. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 39, 13—18 (1937).

In zwei früheren Arbeiten (vgl. dies. Zbl. 17, 123) gab der Verf. für jede in einem Kreise reguläre Funktion $f(r, \theta)$ von zwei reellen Veränderlichen die Darstellung $f = \sum U_k r^{2k}$, wo U_k harmonische Funktionen sind, für die er eine explizite Integraldarstellung angegeben hat. In der vorl. Arbeit wird der Fall betrachtet, wo $f = |F(z)|^2$ ist, wobei $F(z)$ eine analytische Funktion einer komplexen Veränderlichen bedeutet.

Bergmann (Tiflis).

Kneser, Hellmuth: Zur Theorie der gebrochenen Funktionen mehrerer Veränderlicher. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 48, Abt. 1, 1—28 (1938).

Verf. überträgt Teile der Nevanlinnaschen Theorie auf die meromorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen. (S. auch schon wegen einer diesbezüglichen Arbeit

des Verf. dies. Zbl. 16, 126.) Zu diesem Zwecke werden (in dieser sehr bequem lesbaren Darstellung) für den Raum der n komplexen Veränderlichen z_1, z_2, \dots, z_n eine Hermiteische Metrik $\delta\bar{\delta} = \sum_1^n g_{\mu\nu} z_\mu \bar{z}_\nu$ und darauf aufbauend Längenmaß und dann

Inhaltsmaß der Mannigfaltigkeiten der verschiedenen Dimensionen eingeführt. Es wird außerdem der $(2n - 2)$ -dim. komplex projektive Raum herangezogen, dem durch die Hermiteische Form eine mit dieser invariant verbundene Hermiteische Maßbestimmung aufgebracht ist. Die charakteristischen Funktionen $A(r)$ und $T(r)$ der klassischen Theorie werden unter Zuhilfenahme von Mittelbildungen auf den Raum der Veränderlichen z_1, \dots, z_n übertragen. Es wird gesetzt:

$$A(r) = \frac{1}{W_{2n-2}} \int A(f(z\alpha), t) dw_{2n-2}(\alpha).$$

Dabei ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Vektor des $2n$ -dimensionalen Raumes von der Länge 1, der den ganzen projektiven Raum durchläuft, d. h. er nimmt bei der Integration bis auf einen nichtverschwindenden Zahlenfaktor jeden von Null verschiedenen Wert genau einmal an. $f(z\alpha)$ wird als Funktion der einen komplexen Veränderlichen z betrachtet, und in bezug auf diese Funktion wird $A(r)$ gebildet; $dw_{2n-2}(\alpha)$ ist das Element und W_{2n-2} der Gesamteinhalt des projektiven Raumes. Ebenso wird $T(r)$ eingeführt und dann das genaue Analogon zum ersten Hauptsatz bewiesen. — Es werden darauf die Begriffe der endlichen Ordnung, der verschiedenen Typen usw. gebildet und gezeigt, wie weit eine Funktion bestimmter endlicher Ordnung durch ihre Null- und Polstellen festgelegt ist. — Zum Schluß wird nachgewiesen: Eine ganze Funktion endlicher Ordnung hat auch auf linearen Teilmannigfaltigkeiten keine höhere Ordnung.

Behnke (Münster i. W.).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

Onicescu, O., et G. Mihoc: Sur une suite d'urnes disposées en cercle. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. 24, 349—356 (1938).

m urnes U_1, U_2, \dots, U_m sont disposées en cercle; U_k contient λ_k boules blanches et μ_k noires; on suppose $\lambda_1 = 0, \mu_m = 0$. Si une boule blanche (ou noire) apparaît au $p^{\text{ième}}$ tirage effectué dans U_k , le tirage suivant sera effectué dans U_{k-1} (ou dans U_{k+1}). Soit $P_k(n)$ la probabilité d'extraire au $n^{\text{ième}}$ tirage une boule blanche en sachant que le premier tirage a été effectué dans U_k . Si n augmente indéfiniment, l'expression $[P_k(1) + P_k(2) + \dots + P_k(n)]/n$ tend vers $1/2$. Le nombre total α de boules blanches obtenus dans n tirages diffère de $\frac{n}{2}$ d'une quantité finie et indépendante de n , de sorte que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha/n) = 1/2$ au sens d'Analyse classique. Enfin le cas est considéré où il y a trois espèces de boules: blanches, noires et rouges. Si l'on extrait une boule blanche ou noire, le tirage suivant s'opère d'après la règle énoncée plus haut. Si l'on extrait une rouge de U_k , le tirage suivant s'opère dans la même urne U_k . B. Hostinsky.

Greenwood, Joseph A.: Variance of a general matching problem. Ann. math. Statist. 9, 56—59 (1938).

Die t Symbole E_1, \dots, E_t seien in einem Kartenspiel (A) je in s Exemplaren vertreten, während in einem zweiten Spiele (B) E_k genau i_k -mal vorkommt mit $i_1 + \dots + i_t = st$. Aus (A) und (B) werden je ein geordnetes Paar (a) und (b) zufallsmäßig gezogen. Verf. berechnet die Wahrscheinlichkeiten der vier partiellen Deckungsmöglichkeiten von (a) und (b); daraus werden dann Korrelationskoeffizient, Extremalbedingungen u. dgl. berechnet. W. Feller (Stockholm).

Persidskij, K.: Über das Gesetz der großen Zahlen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 18, 81—83 (1938).

The author proves theorems on sequences of uniformly integrable chance variables,

i.e. on sequences $\{x_j\}$ of chance variables whose expectations $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\{\text{Prob. } x_j < \lambda\}$ are uniformly convergent integrals. 1. He finds that a necessary and sufficient condition that such a sequence satisfy the law of large numbers is that a) Expectation $\frac{|x_1 + \dots + x_n|}{n} \rightarrow 0$, or b) if $\beta > 0$, there is a positive number $L(\beta)$ such that if $L \geq L(\beta)$, and if n is sufficiently large, $n \geq n(L, \beta)$,

$$\text{Expectation } \frac{(y_1 + \dots + y_n)^2}{n^2} < \beta,$$

(where $y_j = x_j$ if $|x_j| \leq L$ and otherwise $y_j = 0$). 2. If the chance variables are independent in pairs, any uniformly integrable sequence of chance variables obeys the law of large numbers. The latter result includes previous ones due to Khintchine (for $x_1 \equiv x_2 \equiv \dots$) and A. Markoff (for Expectation $|x_j|^{1+\delta} \leq \text{const.}$, $\delta > 0$, $j \geq 1$).
J. L. Doob (Urbana).

Feldheim, Ervin: Nouvelle démonstration et généralisation d'un théorème de Simons sur un problème du calcul des probabilités. Mat. fiz. Lap. 45, 99—113 u. franz. Zusammenfassung 113—114 (1938) [Ungarisch].

Hat $T_r = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$ die aus dem Bernoullischen Theorem geläufige Bedeutung, ist ferner $m = [np]$, so wird zunächst gezeigt, daß immer, wenn $p < q$, auch

$$\sum_{r=0}^{m-1} T_r > \sum_{r=m+1}^n T_r \text{ ist; anschließend wird eine asymptotische Formel für die Differenz}$$

$$\sum_{r=0}^{m-1} T_r - \sum_{r=m+1}^n T_r \div \frac{q-p}{3\sqrt{2\pi npq}}$$

ermittelt; ein zweiter, allgemeinerer Weg führt zu dem gleichen Ergebnis. F. Knoll.

Smirnof, N. V.: Sur la distribution de ω^2 (critérium de M. v. Mises). Rec. math. Moscou N. s. 2, 973—993 u. franz. Zusammenfassung 993 (1937) [Russisch].

Detailed proof of a result announced in the C. R. Acad. Sci., Paris 202, 449—452 (1936) (this Zbl. 13, 173—174).
J. L. Doob (Urbana).

Tornier, Erhard: Zusatz zu der Arbeit: „Verallgemeinerung eines Rückschlussesatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung“. Deutsche Math. 3, 317—319 (1938).

In der unter dem angegebenen Titel erschienenen Arbeit des Verf. [Deutsche Math. 2, 469—473 (1937); dies. Zbl. 17, 270] kann in den Voraussetzungen fortgelassen werden bei 1. „deren Beträge in i gleichmäßig beschränkt seien“, bei 2. „es gebe ein $c > 0$ so, daß $\sigma_{x_i}^2 > c$ für $i = 1, 2, \dots$ gilt“, wenn dafür hinzugefügt wird: „3. Nicht alle x_r , deren zugeordnete p_r von 0 verschieden sind, sind einander gleich.“ Kamke.

Raikov, D.: On the decomposition of Gauss and Poisson laws. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. Nr 1, 91—120 u. engl. Zusammenfassung 120—124 (1938) [Russisch].

Diese Arbeit gehört zur Arithmetik der Verteilungsfunktionen und bringt neben neuen Beiträgen auch Beweise bekannter Sätze, die methodisch interessante Vereinfachungen zu enthalten scheinen. Leider enthält der englische Auszug nur eine Zusammenstellung der Resultate. — Im folgenden bedeute $F(x)$ (auch mit Indizes) stets eine Verteilungsfunktion, $f(t)$ die zugehörige charakteristische Funktion. $\Phi(x)$ bezeichnet die Gaußsche Normalfunktion, $F(x; \lambda)$ ($\lambda \geq 0$) das Poissonsche Gesetz

$\sum_{k=0}^{[x]} e^{-\lambda} \lambda^k / k! - \S 1.$ Falls $f(t)$ für $|t| < R$ regulär ist, so auch für $|Jt| < R$, und es gilt im ganzen Streifen dieselbe Integraldarstellung für $f(t)$. Wenn dann für reelle t $f(t) = f_1(t)f_2(t)$ gilt, so sind auch die $f_i(t)$ im ganzen Streifen regulär. (Vgl. hierzu auch dies. Zbl. 15, 361, Lévy). Ferner: Es sei $F_1(x)$ ein Teiler von $F(x)$, und für ein gewisses reelles v sei $\int e^{vx} dF(x)$ konvergent. Dann gibt es zwei endliche und von v unabhängige Konstanten C und a derart, daß $\int e^{vx} dF_1(x) \leq C e^{a|v|} \int e^{vx} dF(x)$ gilt. § 2. Mit Hilfe des letzten Satzes gibt Verf. einen neuen Beweis des Cramér-

schen Satzes über die Teiler von $\Phi(x)$, vgl. dies. Zbl. 14, 121. § 3. Der entsprechende Satz des Verf. über $F(x; \lambda)$, vgl. dies. Zbl. 15, 407. Hierbei wird eine von Khintchine herrührende Vereinfachung angebracht. — Es folgen neue Charakterisierungen für $\Phi(x)$ und $F(x; \lambda)$: § 4. Wenn sämtliche Teiler von $F(x)$ der Form $F(ax + b)$, $a \geq 0$ sind, so gehört $F(x)$ zur Klasse von $\Phi(x)$, (d. h. es ist $F(x) = \Phi(\alpha x + \beta)$). § 5. $F(x)$ möge unendlich viele Teiler $F_n(x)$ haben, derart, daß nicht $F_n(x - a_n) \equiv F_m(x - a_m)$ ist, und derart, daß in jedem Paar $(F_n(x), F_m(x))$ eine der Funktionen Teiler der anderen ist. Dann gehört $F(x)$ zur Klasse einer der Verteilungsfunktionen $\Phi(x)$, $F(x; \lambda)$ oder $1 - F(-x; \lambda)$. § 6. Es sei

$$F_n(x; \gamma, \sigma, \lambda) = F\left(\frac{x - \gamma_1}{\sigma_1}; \lambda_1\right) * \cdots * F\left(\frac{x - \gamma_n}{\sigma_n}; \lambda_n\right), \quad \sigma_i > 0, \lambda_i \geq 0.$$

Es wird die Form der charakteristischen Funktion der möglichen Teiler von F_n angegeben und bewiesen: falls es keine nichttriviale Relation $r_1 \sigma_1 + \cdots + r_n \sigma_n = 0$ mit rationalen r_i gibt, so kann jeder Teiler von F_n selbst in der Form $F_n(x; \delta, \sigma, \mu)$ dargestellt werden mit $\mu_i \leq \lambda_i$ für $i = 1, \dots, n$. Die Voraussetzung über die σ_i kann hierbei ersetzt werden durch die Bedingung, daß $\max \sigma_i \leq 2 \min \sigma_i$. § 7 bringt einige Resultate, die im wesentlichen bereits in dies. Zbl. 15, 361 erwähnt wurden. — [Weitere Resultate über endliche Produkte Poissonscher Gesetze hat inzwischen P. Lévy erhalten; vgl. dies. Zbl. 16, 127 und 198; 17, 272 und die Zusammenfassung in Ann. École. norm. sup. III s. 54 (dies. Zbl. 18, 31).] W. Feller (Stockholm).

● **Traité du calcul des probabilités et de ses applications. Publié par Émile Borel. Tome 1. Les principes de la théorie des probabilités. Fasc. 3. — Fréchet, Maurice: Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités. 2. livre: Méthode des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles.** Paris: Gauthier-Villars 1938. X, 315 pag. Frs. 130.—.

Das vorliegende zweite Buch bildet ein in sich abgeschlossenes Ganzes, und der behandelte Stoff bedingt in der Behandlungsweise sogar einen gewissen Gegensatz gegenüber dem ersten Buch. Handelte es sich dort um vielgestaltige Ausschnitte aus allgemeinen Theorien und Ansätzen, so ist das zweite Buch praktisch ganz einer einheitlichen und konkreten analytischen Fragestellung gewidmet: dem asymptotischen Verhalten bei Versuchsreihen mit endlich vielen möglichen Zuständen. Hierbei werden bloß solche Ketten betrachtet, bei denen die Wahrscheinlichkeiten der Zustandsänderungen nur vom augenblicklichen Zustand, nicht aber von der Zeit und von der Vorgeschichte abhängen (zeitliche Homogenität sowie „einfache“ oder nachwirkungsfreie Ketten oder auch „influence globale“ in der Sprechweise von Pólya). Innerhalb dieses Rahmens wird jedoch absolute Vollständigkeit erstrebt, und es werden sowohl für diskrete als auch für kontinuierliche Versuchsreihen alle Fragen behandelt, die mit dem asymptotischen Verhalten zusammenhängen (Grenzverhalten der Übergangswahrscheinlichkeiten, stochastische Veränderliche, Frequenzen u. dgl.). Bekanntlich hat die Ergodentheorie derartiger Versuchsreihen in letzter Zeit wesentliche Fortschritte gemacht und es ist heute das Verhalten auch vieler „irregulärer“ Fälle bekannt. Eine zusammenfassende Darstellung war daher notwendig, und man wird es besonders begrüßen, daß Verf. einerseits keinerlei wahrscheinlichkeitstheoretische Vorkenntnisse voraussetzt, andererseits auch die allerneuesten Resultate in enzyklopädischer Vollständigkeit verarbeitet hat. Zur Klarheit und Übersichtlichkeit trägt viel bei, daß Verf. die verschiedenen Methoden scharf auseinanderhält und vielfach gegeneinander abwägt, so daß ihre Vor- und Nachteile nach Möglichkeit deutlich werden. Daß man in der (übrigens recht klaren) Darstellung gelegentlich Verbesserungen bekannter Beweise findet, braucht kaum betont zu werden. — Dem ersten im Titel erwähnten Gegenstand sind im Buche äußerlich bloß 5 Seiten gewidmet, in denen über den bekannten Poincaréschen Ansatz zur Behandlung des Roulettespiels und ähnlicher Fragen referiert wird. Es ist jedoch klar, daß die Methode der willkürlichen Funktionen innerlich eng mit den Ergodenproblemen zusammenhängt. — Zur Erleichterung der Lektüre ist dem Buche ein Anhang über lineare Differenzen- und Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beigegeben sowie zwei Register. Ferner findet man ein ausführliches Literaturverzeichnis für Arbeiten, die in dem Mémorial-Heft von Hostinský noch nicht berücksichtigt wurden.

W. Feller (Stockholm).

Kolmogoroff, A.: **Chaînes de Markoff avec une infinite dénombrable des états possibles.** Bull. Univ. État Moscou, Sér. Int., Sect. A: Math. et Mécan. 1, Fasc. 3, 1—15 u. franz. Zusammenfassung 16 (1937) [Russisch].

L'article est consacré aux démonstrations complètes des théorèmes énoncés par

l'auteur dans la Note „Anfangsgründe der Theorie der Markoffschen Ketten mit unendlich vielen möglichen Zuständen“ (Rec. math. Moscou, N. S. 1 (43), 607—610; ce Zbl. 15, 219—220). *Autoreferat.*

Potoček, Jan: Une remarque sur les chaînes de Markoff réversibles. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1536—1538 (1938).

Soit une chaîne de Markoff simple caractérisée par la matrice $\|p_{ik}\|$. Si les probabilités absolues sont constantes, la chaîne sera réversible (Kolmogoroff, Math. Ann. 112; ce Zbl. 12, 410) si l'on a $p_i p_{ik} = p_k p_{ki}$. Répondant à une question de B. Hostinský (Ann. Inst. H. Poincaré 7, 116; ce Zbl. 17, 77), l'auteur montre qu'il existe des matrices non symétriques qui vérifient cette relation. Suit une généralisation pour le cas continu. *Ville (Paris).*

Hostinský, Behuslav: Résolution d'un problème général de la théorie de la diffusion. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1452—1455 (1938).

In $a < x < b$ mögen gelöste Partikel einer gewöhnlichen Diffusion mit konstantem Diffusionskoeffizienten D und unter Einwirkung einer äußeren Kraft $f(x)$ unterliegen; außerdem mögen aber auch stochastisch unstetige Lagenänderungen vorkommen. wobei $A(x, y, t)dxdt$ für ein Teilchen aus $(x, x + dx)$ die Wahrscheinlichkeit angibt, während $(t, t + dt)$ nach y zu springen. Zur Zeit t_0 sei die Gesamtmasse in x_0 konzentriert, und $\Phi(x_0, x, t_0, t)$ soll die Konzentration für $t > t_0$ angeben. Dann gilt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial (f(x)\Phi)}{\partial x} + \int_a^b \Phi(x_0, z, t_0, t) A(z, x, t) dz$$

mit den üblichen Randbedingungen. Verf. hat gelegentlich eine Reihenentwicklung für die Lösung angegeben, und beweist nun ihre Gültigkeit in neuer elementarer Weise. (Für die Ableitung der Differentialgleichung vgl. Kolmogoroff, dies. Zbl. 1, 149; für Lösungen auch mit nichtkonstantem D im unendlichen Intervall, Feller, dies. Zbl. 14, 222.) *W. Feller (Stockholm).*

Jeffreys, Harold: Significance tests when several degrees of freedom arise simultaneously. Proc. roy. Soc., Lond. A 165, 161—198 (1938).

The related questions of departure from a uniform distribution of chance, of representation of measurements by assigned functions and more generally of independence of assumed parameters are re-examined in the light of exact methods of integration in place of certain approximate estimates previously used. Chauvenet's now classical criterion for the rejection of abnormal observations is examined critically and more effective methods are introduced, particularly for cases where several degrees of freedom may be expected to arise together if one of them does. A convenient test for independence is given using only the means of groups of consecutive observations and the standard deviation of the complete set. The theory is applied to some important numerical examples: The node of Venus, considered by Newcomb to be remarkably free from systematic error, seems in the light of old data but new methods to show odds of about 160 000 to 1 for a genuine discrepancy. Karl Pearson's examination (1902) of the constancy of the personal equation and the correlations of the errors of different observers in astronomical observations, is reopened with striking results. A conclusion is obtained in general favorable to the probable general accuracy of reports from observing stations for the construction of seismological time tables as against special local studies. *Albert A. Bennett (Providence).*

Gini, Corrado: Di una formula comprensiva delle medie. Metron 13, Nr 2, 3—22 (1938).

The author considers possible choices of a mean for a finite set $\{a_i\}$ of n terms. A mean is of the "rigid" type if its value depends upon the values of all the terms. Among means of rigid type, three subtypes are mentioned: the basal, the exponential, and the baso-exponential, according as the terms enter as bases, exponents or both. For basal means, a "comprehensive" formula with four parameters is proposed

from which by specialization the classical basal types and many new ones are obtainable. This mean with the parameters (c, d, p, q) is the $(cp - dq)$ -th root of $\left[\binom{n}{d} \sum P^c(a_i^p)\right] / \left[\binom{n}{c} \sum P^d(a_i^q)\right]$, where $\sum P^e(a_i^s)$ designates the elementary symmetric function of order e in the s -th powers of the n terms of the given set. Eight illustrative numerical tables are worked out for the five-term set $(1, 2, 10, 20, 100)$; showing in one array of cases, "means" which lie outside the range of the given set. The article extends considerably work by Dunkel [Ann. of Math. 11, 21—32 (1909—1910)] while avoiding the "purely theoretical" easy generalizations with arbitrary coefficients, given by a number of recent authors. *Albert A. Bennett* (Providence).

Dwyer, Paul S.: Combined expansions of products of symmetric power sums and of sums of symmetric power products with application to sampling. Ann. math. Statist. 9, 1—47 (1938).

The first three chapters of this paper have for their main subject the process of the expression of "power product sums", which differ from monomial symmetric functions only by a factor depending on the corresponding partition, in terms of power sums and vice versa. Thus the results are essentially classical but the mode of development is the author's. But in Chapter IV he considers a general form of an operation which is essentially carried out in calculating moments of moments in samples from a finite population, which is namely to expand products of power sums in terms of power product sums, in the result multiplying each term by a coefficient depending only on the partition it corresponds to, and then to finally express the result in terms of power sums. The "double expansion theorem" here developed gives the complete result which in the final chapter is extended to multivariate situations. In Part II of this paper, to be published, we are promised applications to sampling problems.

C. C. Craig (Ann Arbor).

Dodd, E. L.: Definitions and properties of the median, quartiles, and other positional means. Amer. Math. Monthly 45, 302—306 (1938).

As shown by D. Jackson, the indefiniteness in the definition of the median of a set of real numbers can be avoided by the use of a limit process. The author gives a corresponding definition of quartiles and other " k -iles". The properties of these unique k -iles are discussed under reference to earlier papers (see also this Zbl. 10, 108).

H. Wold (Stockholm).

Barral Souto, Jose: Der „Modus“ und andere Mittelwerte, Spezialfälle eines und desselben mathematischen Ausdrucks. Bol. mat. 11, 29—43 (1938) [Spanisch].

Untersuchungen an Mittelwerten, die als Potenzenmittel (insbesondere harmonische, geometrische, arithmetische und quadratische Mittel) oder als Minimalwerte des Potenzenmittels der Abweichungen (insbesondere Modus, Mediane, arithmetische Mittel) darstellbar sind. U. a. wird bemerkt, daß im zweiten Falle die Mittelwerte „homogen“ und „transitiv“ sind.

Bruno de Finetti (Trieste).

Versicherungsmathematik und verwandte Anwendungen:

Schneider, Erich, und Børge Jessen: Absatz, Produktion und Lagerhaltung bei einfacher Produktion. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforsch 4, 99—120 (1938).

Hat ein Unternehmen einen „Absatzplan“ $v(t)$ [vermutlicher Absatz pro Zeiteinheit als Funktion der Zeit] für eine zukünftige Periode $0 \leq t \leq T$ gewählt, so besteht die Aufgabe, die Produktionsgeschwindigkeit $x(t)$ als Funktion der Zeit so zu bestimmen, daß 1. die Kapazität C des Unternehmens niemals überschritten wird, $x(t) \leq C$, daß 2. stets so viel produziert wird, daß der geplante Absatz möglich ist, und daß 3. die gesamten Kosten unter Berücksichtigung der Verzinsung minimal werden. Schneider erörtert diese Aufgabe unter sehr speziellen Annahmen über die Kostenfunktion $K(x)$. Jessen löst das Problem allgemein durch Zurückführung auf das folgende, wesentlich einfachere: Es seien $T, C, V \leq CT, \rho$ positive Konstanten und $K(x), 0 \leq x \leq C$, eine monoton wachsende konvexe Funktion. Unter allen Funk-

nionen $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, mit $0 \leq x(t) \leq C$ und $\int_0^T x(t) dt = V$ ist diejenige zu bestimmen, für die $\int_0^T K[x(t)]e^{-\rho t} dt$ möglichst klein ausfällt. Die Lösung dieses Problems läßt sich mit Hilfe der Lösungen $x(t)$ der Gleichung $K'[x(t)]e^{-\rho t} = \text{konst.}$ sehr einfach angeben. W. Fenchel (Kopenhagen).

Linder, Arthur: Die Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforschg 4, 136—156 (1938).

Kostitzin, Vladimir A.: Sélection naturelle et transformation des espèces du point de vue analytique, statistique et biologique. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1442—1444 (1938).

Grâce à son interprétation par systèmes différentiels (cf. ce Zbl. 18, 77, 160, 228) l'auteur observe que les conditions de stabilité des états d'équilibre final d'une population permettent d'en apprécier les probabilités. Mais la variation des coefficients vitaux écarte les équilibres avec plusieurs groupes et ne permet guère que la survivance d'une seule race pure. Le modèle mathématique esquissé explique la stabilité des espèces et la concilie avec une transformation finalement inévitable. *Brelot* (Bordeaux).

Lidstone, G. J.: Some properties of Makeham's second law of mortality and the double and triple geometric laws. J. Inst. Actuar. 68, 535—540 (1938).

The paper deals first with developments from a mortality table characterized by a force of mortality, μ_x , at age x given by

$$\mu_x = A + Hx + Bc^x.$$

It is shown that, by an appropriate change in the force of interest from δ to δ' , we may find the present value of a continuous joint life annuity, $\bar{a}_{xyz \dots (m)}$, on m lives of unequal ages by substituting m lives of equal ages, and thereby greatly facilitating the calculations. It is further shown that to find the single premium, $\bar{A}'_{xyz \dots (m)}$, for a contingent assurance under this Second Law of Makeham, methods may be used similar to and only slightly less simple than the methods used under the well-known First Law. — Next, the Double Geometric Law expressed by

$$\mu_x = A + Bc^x + Mn^x,$$

and the laws

$$\mu_x = A + (B \cos x\Phi + M \sin x\Phi) c^x$$

and

$$\mu_x = A + Bc^x + Mxc^x$$

are examined in an interesting manner as bases of contingent assurances. — In the final section of the paper, the law

$$\mu_x = A + Bc^x + Mn^x + Rr^x$$

involving three geometric progressions is investigated with special reference to turning points and points of inflexion. H. L. Rietz (Iowa).

Del Vecchio, Ettore: Sul comportamento del tasso istantaneo di una tavola compatta di mortalità. Riflessi sulla riserva matematica compatta. Giorn. Mat. Finanz., II. s. 8, 1—21 (1937).

Die Anzahl derjenigen Lebenden eines Bestandes, welche vor t Jahren im Alter y aufgenommen wurden, werde mit $l_{[y]+t}$ bezeichnet (Selekttafel), die Anzahl der gegenwärtig x -jährigen mit l_x (Aggregattafel), die Anzahl der vor t Jahren aufgenommenen mit L_t (Kompakttafel); die entsprechenden Sterbeintensitäten werden durch $\mu_{[y]+t} = -\frac{1}{l_{[y]+t}} \cdot \frac{\partial l_{[y]+t}}{\partial y}$, $\mu_x = -l'_x : l_x$, $\mu_t = -L'_t : L_t$ definiert. — Die Zusammenhänge zwischen den so erklärten drei Ausscheideordnungen bzw. ihren Intensitäten werden dargestellt. Unter Voraussetzungen, welche in den üblichen Selekttafeln erfüllt sind, wird gezeigt, daß μ_t für nicht sehr große Dauern mit t zunimmt. Unter wesentlich stärkeren Voraussetzungen über die Alterszusammensetzung des Bestandes, Wirkungsdauer der Auslese und Ausgleichung der Tafel wird bewiesen, daß μ_t für

$t > 5$ immer zunimmt. Nimmt $\mu_{[y]+t}$ mit y zu, so ist die „Kompaktreserve mit konstanter Durchschnittsprämie“ \mathfrak{B}' für Todesfall und gemischte Versicherungen kleiner als die „mathematische Kompaktreserve“ \mathfrak{B} , welche für den Gesamtbestand der gewöhnlichen mathematischen Reserve äquivalent ist; für zunehmendes μ_t ist $\mathfrak{B}' > 0$. Wegen der Definitionen von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' muß auf die Originalarbeit verwiesen werden.

Birnbaum (New York).

Walther, Fritz: Eine Morbiditätstafel für die Krankenpflegeversicherung. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H. 35, 61—91 (1938).

Dubourdieu, Jules: Remarques relatives à la théorie de l'assurance-accidents. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 303—305 (1938).

Suppose that if an event (the author is considering insurance losses) occurs N times in a time interval T , the probability that it will occur n ($\leq N$) times in a sum of sub-intervals of total length t is $\frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{t}{T}\right)^n \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{N-n}$. Let $p_n(t)$ be the probability that the event will occur n times in an interval of length t . The author finds that then $p_n(t) = (-1)^n \frac{t^n}{n!} \frac{d^n p_0(t)}{dt^n}$, and $p_0(t)$ can be expressed in the form $p_0(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\Phi(\lambda)$, where $\Phi(\lambda)$ is a non-decreasing function. The special case $p_0(t) = e^{-at}$ gives the law of Poisson in which (as is not true in general) if x_I is the number of events occurring in the interval I , x_{I_1} , x_{I_2} are independent if I_1 , I_2 are non-overlapping.

J. L. Doob (Urbana).

Eberhard, O. v.: Über das Fehlergesetz des größten Fehlers einer Serie und das Fehlergesetz der Salvenausdehnung. Z. angew. Math. Mech. 18, 128—135 (1938).

Numerische und graphische Methoden.

Frank, M.: Über die Annäherung beliebiger Polygone mittels Unicursalkurven. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. Nr 1, 137—159 u. deutsch. Zusammenfassung 159—160 (1938) [Russisch].

Das geschlossene Vieleck durch die Punkte (a_k, b_k) , $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$, läßt sich durch die Gleichungen

$$x = a_0 + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(a_{k+1} + a_k - 2a_0) + (a_{k+1} - a_k)(t - 2k)}{2[1 + (t - 2k)^{2n}]},$$

$$y = b_0 + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(b_{k+1} + b_k - 2b_0) + (b_{k+1} - b_k)(t - 2k)}{2[1 + (t - 2k)^{2n}]}$$

annähern ($a_m = a_0$, $b_m = b_0$). Sind ξ, η bei festem t die Grenzwerte von x, y für $n \rightarrow \infty$, so werden die Unterschiede $\delta_x = |x - \xi|$, $\delta_y = |y - \eta|$ in einfacher Weise zu $O\left(\frac{1}{2^{2n\varepsilon}}\right)$ bei $0 < |t - 2k - 1| = \varepsilon < 1$ (Seiten) und zu $O\left(\frac{1}{3^{2n}}\right)$ bei $t = 2k + 1$ (Ecken) abgeschätzt. Weitere Untersuchungen betreffen Approximation der Seitenrichtungen, gemeinsame Punkte von Vieleck und Näherungskurve, Verhalten an den Ecken, Doppelpunkte und Übertragbarkeit der Betrachtungen auf nicht geschlossene Streckenzüge und Graphen.

Theodor Zech (Darmstadt).

Willers: Zur Konvergenz des Newtonschen Näherungsverfahrens. Z. angew. Math. Mech. 18, 197—200 (1938).

Die Konvergenz des Newtonschen Verfahrens läßt sich u. U. durch Transformation der Variablen beschleunigen, indem der Faktor K in der Ungleichung $\delta_{n+1} \leq K\delta_n^2$ kleiner wird. Verf. gibt unter gewissen Vernachlässigungen die Bedingungen hierfür an, und zwar in den Fällen einer und dreier Variablen. Gleichzeitig findet er Bedingungen

für die Konvergenz des Newtonschen Verfahrens überhaupt für mehrere Variable und erhält dabei eines der Resultate einer Arbeit Ostrowskis betr. zweier Variablen (dies. Zbl. 15, 364) wieder. *Bodewig* (Basel).

Pipes, Louis A.: Matrix solution of polynomial equations. J. Franklin Inst. 225, 437—454 (1938).

Um die Wurzeln eines Polynoms mit reellen Zahlenkoeffizienten zu finden, kann man in bekannter Weise die Potenzmethode von Graeffe verwenden. Man erhält nun dasselbe Ergebnis, wenn man dem Polynom eine geeignete „assozierte Matrix“ zuordnet und diese nach den Matrixregeln genügend häufig mit sich selbst multipliziert. Genau wie bei der Graeffemethode erhält man zunächst die größte reelle Wurzel, erniedrigt das Polynom um den entsprechenden Wurfelfaktor und verfährt mit dem Restpolynom in gleicher Weise wie vorher. Der Verf. zeigt an Zahlenbeispielen die praktische Erledigung von einigen Fällen einschließlich komplexer und mehrfacher Wurzelwerte. Die Matrixmethode bietet wohl keine Verringerung der Rechenarbeit, mag aber eine etwas befriedigendere Basis liefern als die Graeffemethode. Im letzten Abschnitt gibt der Verf. auch eine Verallgemeinerung der Sturmschen Methode zur angenäherten Bestimmung der reellen Wurzelwerte. *Ernst Weber* (New York).

Cimmino, Gianfranco: Calcolo approssimato per le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari. Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz. 1, 326—333 (1938).

Vorgelegt sei ein System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten. Um durch sukzessive Approximation zu einer Lösung zu gelangen, wird folgende Konstruktion angewendet: Man gehe aus von einem beliebigen Punkt P_0 des n -dimensionalen Raumes und spiegle diesen Punkt an allen n Ebenen, die dem vorgegebenen Gleichungssystem entsprechen. Von den so erhaltenen n Spiegelpunkten sei P_1 der Schwerpunkt, wobei als Massenbelegung irgendeine (feste) positive Belegung gewählt werden kann. Von P_1 bilde man wieder die n Spiegelpunkte und bezeichne deren Schwerpunkt mit P_2 . Auf diese Weise ergibt sich eine Folge von Punkten P_0, P_1, P_2, \dots . Es wird nun gezeigt: Wenn das vorgelegte Gleichungssystem eine Lösung besitzt und wenn der Rang der Koeffizientenmatrix der Unbekannten größer als Eins ist, dann konvergiert die Folge P_0, P_1, P_2, \dots gegen einen Punkt, dessen Koordinaten eine Lösung des Gleichungssystems sind. — Anschließend eine Bemerkung über den Fall, daß die vorgegebenen Gleichungen unverträglich sind und eine Ausdehnung auf den Fall einer Integralgleichung erster Art. *Rellich* (Marburg, Lahn).

Barta, J.: Über die Eigenwerte der Differentialgleichungen. Mat. termézet. Értes. 57, Tl 1, 434—439 u. deutsch. Zusammenfassung 440 (1938) [Ungarisch].

Es wird ein einfacher Weg für die Fehlerabschätzung bei der Berechnung von Eigenwerten angegeben. *Auszug.*

Schmidt, Adolf: Nachtrag zu dem Aufsatz: „Über die Methode von Arthur Schuster zur analytischen Darstellung numerisch gegebener Funktionen auf der Kugelfläche“. Terrest. Magnet. Atmosph. Electr. 43, 135 (1938).

Vgl. dies. Zbl. 17, 367.

● **Hußmann, Albrecht:** Rechnerische Verfahren zur harmonischen Analyse und Synthese mit Schablonen für eine Rechnung mit 12, 24, 36 oder 72 Ordinaten. Berlin: Julius Springer 1938. 28 S. 24 Abb. u. 16 Taf. RM. 9.60.

Nach einer kurzen Einführung in die harmonische Analyse werden die Schemaverfahren, insbes. die Rungesche Faltung, eingehend behandelt. Zur praktischen Durchführung der Rungeschen Schemaanalyse mit 12, 24, 36 oder 72 Ordinaten werden Vordrucke zum Unterlegen unter Pauspapier nebst ausführlicher Benutzungsanweisung beigegeben. Als Mittel zur Fehlerschätzung werden die Reihendarstellung der Schema-koeffizienten durch die genauen Fourierkoeffizienten sowie ihre Beziehungen zu den genauen Koeffizienten von Sehnen- und Parabelzug genannt. Nebenher ergibt sich dabei die Grundlage für das Verfahren von Fischer-Hinnen, bei dem zur Bestim-

mung eines einzelnen Koeffizienten jeweils passend ausgewählte Ordinaten nur mit wechselnden Zeichen addiert zu werden brauchen. Literaturverzeichnis mit 21 Nummern.

Theodor Zech (Darmstadt).

Meyer zur Capellen, Walther: Fluchtlinientafeln und Rechengetriebe. Z. Instrumentenkde 58, 221—228 (1938).

Übliche Leitertafeln werden möglichst wörtlich in Getriebe übersetzt: Die Leitern werden durch Schubstangen mit Kulissenstein, die Ableselinien durch Schlitzführungen ersetzt gedacht. Neben geraden Ableselinien werden auch gebrochene und gekrümmte Weiser betrachtet. Andeutungen über gekrümmte Leitern: Steuerung der Schubstangen mittels gekrümmter Schlitze, Kurbeltriebe, Verzahnungen. *Theodor Zech*.

Wilks, S. S.: The analysis of variance and covariance in non-orthogonal data. Metron 13, Nr 2, 141—154 (1938).

In the case of multiply-classified non-orthogonal data, it is shown that, following the usual method of fitting constants by least squares, the actual determination of the constants can be avoided and the sums of squares required for the appropriate analyses of variance obtained by the evaluation of certain determinants. Naturally the analysis of orthogonal data is included as a special case. The method is illustrated with a numerical example.

C. C. Craig (Ann Arbor).

Geometrie.

● **Malengreau, Julien: Essai sur les fondements de la géométrie euclidienne.** Lausanne, Genève, Neuchâtel, Vevey, Montreux, Berne et Bâle: Libr. Payot & Cie. 1938. 311 pag. et 23 planches. Frs. 8.—

Axioms for "elementary" euclidean spaces are given and the fundamental properties of these spaces are investigated. The basic notions are "point" and "distance". Three points are collinear if the distance between the members of one pair of them is equal to the sum of the distances between the members of the other two pairs. If X ranges over the set of points collinear with two fixed points A, B , the ratio of the undirected distances AX/AB assumes all non-negative rational values, and only these. This last property is the "elementary" characteristic of the spaces. — The properties of tripoints (a tripoint is a set of three points) and operations with these figures lead to a determination of the properties of planes. The elementary $(n - 1)$ -spaces determined by "perfect" n -points (a "perfect" n -point is a set of n points such that the distance between two points of the set is the same as the distance between any other two points in the set) are studied. Such a space contains the line (plane, 3-space, ...) determined by any two (three, four, ...) of its points. The study of elementary spaces is complicated by such features as: A given line may fail to contain two points the distance between which is equal to the distance between two given points not on that line, an angle may fail to have a bisector, a given plane may fail to contain a triangle similar to a given triangle not in that plane. *J. L. Dorroh* (Marion).

Thébault, V.: Sur le théorème de Feuerbach. Bull. sci. École polytechn. Timișoara 8, 13—16 (1938).

Gambier, Bertrand: Triangles homologiques, tétraèdres homologiques, tétraèdres en situation hyperboloidale. Bull. Soc. Math. France 66, 8—47 (1938).

1. Deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ d'un même plan sont homologiques si AA_1, BB_1, CC_1 concourent au point S ; alors l'hexagone $AB_1CA_1BC_1$ est circonscrit à un conique et réciproquement. Une homologie entraîne une seule condition pour les deux triangles. L'auteur étudie combien d'homologies on peut obtenir en changeant l'ordre des sommets et il retrouve les résultats connus: Il y a 0, 1, 2, 3, 4 (de deux façons) ou 6 homologies, dans le dernier cas la figure est imaginaire. — 2. Tétraèdres homologiques; pour réaliser l'homologie on trouve cinq conditions. Écartant les cases triviaux, l'auteur trouve

que 0, 1, 2 ou 4 homologies sont possibles. Quand il y a deux homologies, on a nécessairement le type: $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ et $ABCD, B_1A_1D_1C_1$; quand AB et CD sont les diagonales non parallèles de deux faces parallèles d'un parallélépipède, $A_1B_1C_1D_1$ les symétriques de $ABCD$ par rapport au centre, les deux tétraèdres ont 4 homologies. — 3. Autre généralisation de l'homologie plane: Les tétraèdres sont en situation hyperboloïdale, c.-à-d. les droites AA_1 etc. sont génératrices d'une même semi-quadrique. Deux tétraèdres en situation hyperboloïdale sont réciproques vis-à-vis d'une certaine quadrique, théorème qui ne semble pas avoir été déjà signalé. Pour la situation hyperboloïdale on trouve trois conditions. L'auteur cherche les tétraèdres qui sont en situation hyperboloïdale de plusieurs façons. Il se sert de deux méthodes, l'une ne fait intervenir que des notions élémentaires de la géométrie analytique (surtout les coordonnées de Plücker), l'autre fait intervenir les biquadratiques et leur représentation par fonctions elliptiques. Quand on a deux situations hyperboloïdales avec deux semi-quadriques non complémentaires leur courbe d'intersection contient les huit sommets. Divers cas peuvent se représenter suivant que les sommets déterminent une seule biquadratique, non décomposée ou décomposée, ou bien ∞^2 biquadratiques. Quand les sommets sont sur une biquadratique unique et non décomposée, 0, 1, 2 et 4 (de deux façons différentes) situations hyperboloïdales sont possibles. L'auteur donne enfin deux tétraèdres avec 6 situations hyperboloïdales, dont 4 sont dégénérées. O. Bottema.

Tallqvist, Hj.: Über Örter gleicher scheinbarer Größe zweier Gegenstände. Soc. Sci. Fennica. Comment. phys.-math. 9, H. 8, 1—36 (1937).

Daus, P. H.: Collineations and central projections. Amer. Math. Monthly 45, 294—298 (1938).

Mit Hilfsmitteln der elementaren projektiven Geometrie wird folgender Satz nachgewiesen (der übrigens aus dem entsprechenden räumlichen Satz, der auch zitiert wird, mittels Zentralprojektion auf eine Ebene sofort ableitbar wäre): Irgend zwei vollständige Vierecke einer Ebene π können immer (und zwar auf unendlich viele Arten) durch drei aufeinanderfolgende perspektive Kollineationen in π miteinander vertauscht werden. J. L. Krames (Graz).

Analytische und algebraische Geometrie:

Lebesgue, Henri: Sur les cercles focaux des coniques. Enseignement Math. 37, 5—23 (1938).

Watson, G. N.: Cubic envelopes derived from systems of conics. Math. Gaz. 22, 261—263 (1938).

Takasu, Tsurusaburo: An elementary, purely projective and synthetic proof of the double six theorem of Schläfli. Tôhoku Math. J. 44, 370—376 (1938).

Wiederholung des vom Verf. in japanischer Sprache gegebenen Beweises für den Schläflischen Satz (dies. Zbl. 11, 411) in englischer Sprache. Steck (München).

Yamashita, Chitose: An elementary, purely projective and synthetic proof and three others for the double six theorem of Schläfli. Tôhoku Math. J. 44, 381—389 (1938).

Methodisch gegenüber Takasu, (vgl. vorst. Ref.) vereinfachte Beweisführungen für den Schläflischen Satz. Verf. gibt insgesamt vier Beweise, von denen der erste nur die Definitionen von Punkten, Geraden, Ebenen und ihrer gegenseitigen Verknüpfung heranzieht. Der zweite Beweis kommt mit der Einführung des Begriffs von Quadriken aus; der dritte benutzt die Geometrie im Bündel. Der vierte Beweis endlich reduziert die Fragestellung auf eine solche der ebenen Geometrie. Steck.

Takasu, Tsurusaburo: An elementary, purely projective and synthetic proof of the Grace's theorem on double six. Tôhoku Math. J. 44, 377—380 (1938).

Wiederholung des vom Verf. in japanischer Sprache gegebenen Beweises für den Graceschen Satz (dies. Zbl. 15, 224) in englischer Sprache. Steck (München).

Yamashita, Chitose: Two elementary, purely projective and synthetic proofs for the Grace's theorem concerning the double six and two consequences. Tôhoku Math. J. 44, 390—400 (1938).

Zwei neue, methodisch gegenüber Takasu (vgl. vorst. Ref.) vereinfachte Beweise für den Graceschen Satz. Diese Beweise ziehen nur mehr wieder die Definitionen von Punkten, Geraden, Ebenen und ihrer gegenseitigen Verknüpfung heran, ohne den Begriff des Doppelverhältnisses, den Takasu noch braucht, zu benutzen. Zwei in diesem Zusammenhang sich ergebende Folgesätze über Projektivitäten der in den Graceschen Satz eingehenden Elemente werden mit denselben methodischen Mitteln bewiesen.

Steck (München).

Turri, T.: Sui gruppi lineari di omografie reali, i quali non lasciano fisso alcuno spazio reale. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 8, 80—82 (1938).

Turri, T.: Ancora sui gruppi lineari di omografie razionali, i quali non lasciano fisso alcuno spazio razionale. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 8, 83—87 (1938).

Humbert, Pierre: Une application de la formule de Salmon. Enseignement Math. 37, 49—50 (1938).

C_1, C_2 sind zwei algebraische Kurven in einer Ebene π ; eine veränderliche durch einen festen Punkt O hindurchgehende Gerade schneidet sie in A_1, A_2 ; K ist die Kurve Ort der Punkte P , die die Strecken $A_1 A_2$ in einem gegebenen Verhältnis schneiden. Zur Bestimmung der Ordnung von K wird C_2 einer beliebigen zu π orthogonalen Schiebung unterworfen; es seien C'_2 ihre neue Lage und Δ die Gerade durch O senkrecht zu π ; die Linien Δ, C_1, C'_2 bestimmen eine Regelfläche Σ ; die Kurve K ist der Schnittkurve von Σ mit einer geeigneten zu π parallelen Ebene gleich; die Ordnungen von K und Σ sind also miteinander gleich. Die eventuellen unendlichfernen Schnittpunkte von C_1, C_2 und die Multiplizitäten von C_1, C_2 in O werden berücksichtigt. Beispiele.

E. G. Togliatti (Genova).

Bronowski, J.: Curves whose grade is not positive in the theory of the base. J. London Math. Soc. 13, 86—90 (1938).

It is proved that if M, N are two curves on an algebraic surface, there exists a (virtual or effective) curve $nM - mN$ (m, n not both zero) whose grade is not positive. This result is shown to be equivalent to either one of the following two theorems: I. Every curve of zero order on a surface, except the zero divisors, has negative grade; II. if a base of curves $\alpha_1, \dots, \alpha_\rho$ is so chosen that $(\alpha_i \alpha_j) = 0, i \neq j$, then one curve has positive grade, say $(\alpha_1^2) > 0$, while $(\alpha_i^2) < 0, i = 2, \dots, \rho$. This last theorem has been first by Hodge by transcendental methods (this Zbl. 16, 73). A simple geometric proof was given by B. Segre (this Zbl. 17, 86), and it is pointed out that the present proof is essentially the same as the one by Segre. However, the author adds at the end of the paper a new proof of theorem II, consisting in showing that if $(\alpha_2^2) > 0$, then four exceptional curves M_1, M_2, M_3, M_4 on a birational transform of the surface could be found such that α_2 and the four curves M_i be algebraically dependent.

O. Zariski (Baltimore).

Waerden, B. L. van der: Zur algebraischen Geometrie. XIV. Schnittpunktszahlen von algebraischen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 115, 619—642 (1938).

In the first part of this paper the author gives a simplified proof of the general theorem of Bezout in a linear S_n . In regard to a previous proof by the same author [Math. Ann. 99 (1928)], the present proof has the advantage of avoiding ideal-theoretic considerations. The proof makes use of a remark by Schaaake to the effect that any M_d can be transformed by a suitable singular projective transformation into a reducible M_d consisting of hyperplanes. This makes it possible to derive the general theorem of Bezout from the special case when M_d is linear, on the basis of the "true specialization" procedure. This first part of the paper also includes the following auxiliary lemma, whose proof is extremely simple, but which is nevertheless very useful and is worth

calling attention to: If ξ_1, \dots, ξ_n are the coordinates of the general point of an algebraic V_r over an algebraically perfect ground field, then the coordinates ξ_i can be so numbered that ξ_{r+1}, \dots, ξ_n be separable algebraic functions of ξ_1, \dots, ξ_r . — The second part of the paper deals with algebraic systems of M_d 's on an algebraic M_n , free from singularities, and with the system generated by the intersection $Q_k = M_d \cdot M_e$, where M_e is fixed. It is proved that as M_d varies in an irreducible algebraic system, then also Q_k varies in an irreducible algebraic system and that the correspondence $M_d \rightarrow Q_k$ is irreducible. It is being assumed that the intersection $M_d \cdot M_e$ does not contain components of dimension greater than $d + e - n$. — The last section contains an application to the algebraic foundations of enumerative geometry (Schubert's calculus). The questions treated refer in particular to the derivation of the commutative, associative and distributive properties of the intersection symbol $M_d \cdot M_e$. (XIII. see this Zbl. 18, 270.)

O. Zariski (Baltimore).

● Severi, Francesco: Contributi alla teoria delle serie e dei sistemi di equivalenza sulle varietà algebriche. Roma: G. Bardi 1937. 23 pag. L. 5.—

Vgl. dies. Zbl. 16, 324.

Differentialgeometrie:

Takasu, Tsurusaburo: A characteristic property of the normal curvature. Tôhoku Math. J. 44, 319—321 (1938).

Unter allen ∞^1 Tangentialkugeln einer Fläche $\mathfrak{r}(u_1, u_2)$ im Punkte (u_1, u_2) erscheint die „Halbschmiegkugel“ vom Radius R und die „duale“ Halbschmiegkugel vom Radius \mathfrak{R} durch Minimalwerte der Größen θ und F charakterisiert. Dabei soll θ den Winkel und $|F|$ das Quadrat des Segmentes $\{(r + dr) - r\} = dr$ hinreichend benachbarter Tangentialkugeln vom Radius r bzw. $r + dr$ bedeuten. Die Größen R bzw. \mathfrak{R} sind die Reziprokwerte der Quotienten $\frac{II}{I}$ bzw. $\frac{II}{III}$ der drei Grundformen I, II, III der Fläche $\mathfrak{r}(u_1, u_2)$.

M. Pinl (Prag).

Yoda, Hiroshi: The dual of the Bouquet-Mathews' formulas. Tôhoku Math. J. 44, 343—346 (1938).

Mit Benutzung der „dualen“ Krümmung und Torsion $P_0^{-1} = -T_0 R_0^{-1}$, $\tau_0^{-1} = T_0$ sowie des Torsionswinkels $d\theta$ hatte T. Takasu ein duales Gegenstück zu den bekannten (auf Bouquet zurückgehenden) Formeln der sog. „kanonischen Darstellung“ einer auf ihren Bogen bezogenen Raumkurve $\mathfrak{r}(s)$ abgeleitet $\left[\frac{1}{R_0}, \frac{1}{T_0} \right]$ gewöhnliche Krümmung und Windung von $\mathfrak{r}(s)$ im Punkte $s = 0$. Dabei bleibt die kanonische Entwicklung auf die Potenzen s^3 beschränkt. Demgegenüber kennt man durch eine Untersuchung von Mathews auch die Koeffizienten der Terme mit s^4 und s^5 , so daß man jetzt wiederum nach den entsprechenden dualen Formeln fragen kann. — Diese Rechnung führt Verf. unter Verwendung der von T. Takasu gegebenen „dualen Frenetformeln“ durch, wobei die Vorzeichen der Bouquetschen und die (numerischen) Koeffizienten der Mathewsschen Formeln im Text nicht immer fehlerfrei eingehen.

M. Pinl (Prag).

Kubota, Tadahiko: Eine Bemerkung zur relativen Kurventheorie. Tôhoku Math. J. 44, 341—342 (1938).

Variiert die Relativkrümmung einer ebenen Kurve monoton, so ist von zwei Relativkrümmungskreisen der eine im anderen enthalten. Dies wird benutzt, um in Evidenz zu setzen, daß die Enveloppe einer Kurvenschar (auch bei Berücksichtigung imaginärer Schnittpunkte) im allgemeinen nicht als Ort der Grenzpunkte der Schnittpunkte benachbarter Scharkurven aufgefaßt werden kann.

W. Fenchel.

Takeda, Kusuo: On line congruence. I. Tôhoku Math. J. 44, 356—369 (1938).

Verf. entwickelt die projektive Differentialgeometrie der Geradensysteme $p(u, v)$ in Plückerschen Linienkoordinaten. Die Geraden des R_3 werden als Punkte der quadratischen Q_4 des R_5 gedeutet. Für ein begleitendes Koordinatensystem stehen zunächst

drei Punkte (Geraden) p, p_u, p_v zur Verfügung. Ist $H_{ik} = p_i p_k$ der Grundtensor des Ricci-Kalküls, so ist $p_5 = \mu H^{ik} p_{ik}$ mit μ als Normierungsfaktor ein von den drei ersten verschiedener Punkt des R_5 . Die zur Ebene (p, p_u, p_v, p_5) bezüglich Q_4 konjugierte Gerade L_1 des R_5 schneidet Q_4 in zwei Punkten p_3, p_4 , die das begleitende Koordinatensystem vervollständigen. Es folgen Ableitungsgleichungen, Integrabilitätsrelationen und Reihenentwicklungen für inhomogene Koordinaten, dabei treten vier quadratische und drei lineare Differentialformen auf. Für geometrische Anwendungen der Grundformeln beschränkt sich Verf. auf Torsenparameter. Nachdem die Bedingungen für W - und lineare Kongruenzen aufgestellt sind, werden die Grenzwerte einiger Doppelverhältnisse bestimmt, die sich rational durch die Formen ausdrücken. *W. Haack.*

Fialkow, Aaron: The Riemannian curvature of a hypersurface. *Bull. Amer. Math. Soc.* 44, 253—257 (1938).

Proof of the following theorem, which is the inverse of a known theorem of Riemannian geometry. — Let V_n be any hypersurface of a V_{n+1} such that the lines of curvature of V_n are real and none of them is tangent to a null vector. Let the Riemannian curvature of V_n at a point for the orientation determined by the direction of two lines of curvature at the point be numerically equal to the corresponding normal curvatures, the sign being determined by the character of the normal to V_n in the enveloping V_{n+1} . Then V_{n+1} is a flat space. — The theorem can readily be generalised for the case that V_{n+1} is of constant curvature. *Struik (Cambridge, Mass.).*

Hlavatý, Václav: Covariant partial equations admitting explicit solutions. *C. R. Acad. Sci. Roum.* 2, 210—216 (1938).

Discussion of the integrability conditions of the tensor equations

$$V_\mu a^\nu = b_\mu^\nu, \quad V_\mu a_\lambda = b_{\mu\lambda},$$

where $b_\mu^\nu, b_{\mu\lambda}$ are given, in an n -dimensional manifold L_n with asymmetrical connection $I_{\mu\lambda}^\nu$, under several assumptions. The first assumption is that the system

$$R^\nu{}_{\omega\mu\lambda} X^\lambda = 0, \quad \text{or} \quad R^\nu{}_{\omega\mu\lambda} X^\nu = 0,$$

admits only the solution $X^\lambda = 0$ or $X^\nu = 0$, $R^\nu{}_{\omega\mu\lambda}$ being the curvature tensor. Other assumptions are that $b_{\mu\lambda}$, the contracted curvature tensor $R^\alpha{}_{\alpha\mu\lambda}$ and the tensor $R^\nu{}_{\omega\mu\lambda} b_\nu^\omega$ be of rank n . The case of a Riemannian manifold is specially discussed. *Struik.*

Modesitt, Virginia: Some singular properties of conformal transformations between Riemannian spaces. *Amer. J. Math.* 60, 325—336 (1938).

Two Riemannian manifolds V_n and V'_n are in conformal correspondence. Their fundamental tensors are related by $g'_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij}$.

The surfaces $\sigma = \text{constant}$ are called H_σ . Their orthogonal trajectories with tangent vectors $\sigma^i = \partial\sigma/\partial x^i$ are called σ -curves. A number of theorems is given dealing with curves which preserve their p^{th} normals, or certain osculating spaces. The σ -curves show exceptional properties. Properties of curves lying in corresponding submanifolds V_m, V'_m are investigated ($m < n$), the behavior of asymptotic lines and lines of curvature is followed. The σ -curves and the H_σ show exceptional behavior. The case that parallel directions along one curve correspond to parallel directions on another curve is also discussed. A typical example of the theorems found in this paper is: "A necessary and sufficient condition that a geodesic C in V_m correspond to a geodesic in V'_m is that C be a σ -curve and that V_m lie in H_σ ." *Struik.*

Monna, A. F.: Kurven in einem Funktionenraum. *Mathematica, Zutphen B* 6, 149—154 u. 164—170 (1938) [Holländisch].

Übertragung der gewöhnlichen Differentialgeometrie auf Kurven im Hilbertschen Raum. Unnötigerweise werden stärkere einschränkende Voraussetzungen gemacht als bei Minetti (vgl. dies. Zbl. 14, 314), nämlich analytische Abhängigkeit vom Kurvenparameter gefordert. *van der Waerden (Leipzig).*

Allgemeine metrische Geometrie, Integralgeometrie, Konkaves und Verwandtes:

Fenchel, W., und B. Jessen: Mengenfunktionen und konvexe Körper. Danske Vid. Selsk., Math.-fys. Medd. 16, Nr 3, 1—31 (1938).

Während bisher die Formeln der Brunn-Minkowskischen Theorie der konvexen Körper nur für Polyeder und Körper mit hinreichend glatten Berandungen aufgestellt worden sind, werden hier analog für beliebige konvexe Körper im n -dimensionalen Raum die gemischte Volumina usw. darstellenden Formeln unter Verwendung Stieltjescher Integrale über total additive Mengenfunktionen auf der Einheitskugel Ω entwickelt; so wird eine neue einfache Darstellung der Theorie unter Abstreifung mannigfacher bisher gemachter Einschränkungen gegeben. Der wesentliche dabei verwendete Begriff ist die „Oberflächenfunktion“ $S(\mathfrak{K}; \omega)$ eines konvexen Körpers \mathfrak{K} , nämlich eine gewisse total additive, nicht negative Mengenfunktion aller Borelmengen ω von Ω (eine Funktion dieser Art sei kurz als Mengenfunktion bezeichnet); sie mißt den Flächeninhalt der Menge $\mathfrak{K}(\omega)$ aller Randpunkte von \mathfrak{K} , die eine Stützebene mit zu ω gehöriger Normalenrichtung besitzen. Eine direkte Definition von S in diesem Sinne wird im letzten Paragraphen der Arbeit durch Übertragung von Minkowskis Definition des Flächeninhalts gegeben: Trägt man in den Punkten von $\mathfrak{K}(\omega)$ normal zu ihren Stützebenen die Strecke t ab und ist $V_t(\omega)$ das n -dimensionale Maß der Vereinigungsmenge dieser Strecken, so ist $S(\mathfrak{K}; \omega) = \lim_{t \rightarrow 0} (V_t(\omega) : t)$. Ursprünglich wird S durch

Approximation von \mathfrak{K} mit konvexen Polyedern gewonnen; dabei folgen die für die Theorie grundlegenden Relationen zwischen einem gewissen mit einem beliebigen konvexen Körper \mathfrak{H} gebildeten gemischten Volumen von n Körpern und einem mit der Stützfunktion $H(\xi)$ von \mathfrak{H} gebildeten Stieltjes-Radonschen Integral

$$V(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}, \dots, \mathfrak{K}) = \frac{1}{n} \int_{\Omega} H(\xi) S(\mathfrak{K}; d\Omega),$$

die ihrerseits S eindeutig bestimmen. Für einen hinreichend glatten Körper ist S daher das unbestimmte Integral der Minkowskischen Krümmungsfunktion. Mit Hilfe der Minkowskischen Ungleichungen erkennt man leicht, daß ein konvexer Körper mit inneren Punkten durch seine Oberflächenfunktion bis auf Translationen bestimmt ist. Als Hauptresultat ergibt sich nun die Übertragung eines Minkowskischen Satzes über konvexe Polyeder: Eine Mengenfunktion $\Phi(\omega)$ ist Oberflächenfunktion eines konvexen Körpers \mathfrak{K} mit inneren Punkten dann und nur dann, wenn 1. der Schwerpunkt der durch $\Phi(\omega)$ bestimmten Massenbelegung von Ω der Nullpunkt ist ($\int_{\Omega} \xi \Phi(d\Omega) = 0$); 2. keine Großkugel ω_n von Ω die gesamte Masse enthält

($\Phi(\omega_n) < \Phi(\Omega)$). \mathfrak{K} wird hierbei durch Auswahl einer konvergenten Teilfolge aus einer unter Benutzung jenes Minkowskischen Satzes hergestellten Folge konvexer Polyeder gewonnen. — Weiterhin wird analog für $n - 1$ konvexe Körper aus $V(\mathfrak{H}, \mathfrak{K}_1, \dots, \mathfrak{K}_{n-1})$ eine „gemischte Oberflächenfunktion“ $S(\mathfrak{K}_1, \dots, \mathfrak{K}_{n-1}; \omega)$ definiert und als Spezialfälle dieser aus \mathfrak{K} und der Einheitskugel noch $n - 2$ „Oberflächenfunktionen niederer Ordnung“ von \mathfrak{K} hergestellt, deren jede \mathfrak{K} ebenfalls bis auf Translationen bestimmt und die für hinreichend glatte \mathfrak{K} Integrale von Krümmungsfunktionen sind; die Frage, welche Mengenfunktionen als solche niedere Oberflächenfunktionen auftreten können, ist vorläufig nicht zu entscheiden. (Vgl. auch Alexandroff, dies. Zbl. 17, 426, und das nachsteh. Referat.) Hellinger (Frankfurt a. M.).

Alexandroff, A.: Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern III. Die Erweiterung zweier Lehrsätze Minkowskis über die konvexen Polyeder auf die beliebigen konvexen Körper. Rec. math. Moscou 3, 27—44 u. deutsch. Zusammenfassung 44—46 (1938) [Russisch].

Es handelt sich um die folgenden beiden Sätze von Minkowski: I. Unter allen konvexen Polyedern mit gegebenem Volumen und gegebenen Normalenrichtungen der

Seitenflächen hat das einer Kugel umschriebene die kleinste Oberfläche. II. Es gibt ein (und bis auf Translationen nur ein) konvexes Polyeder mit im wesentlichen willkürlich vorgegebenen Normalenrichtungen und Inhalten der Seitenflächen. — Die Verallgemeinerung von I, die der Verf. erhält, kann folgendermaßen formuliert werden: Auf der Einheitskugel Ω sei eine abgeschlossene Menge Ω' gegeben, die in keiner Halbkugel enthalten ist. Dann hat unter allen konvexen Körpern gegebenen Volumens, deren Oberflächenfunktionen (vgl. dies. Zbl. 17, 426 oder vorst. Ref.) außerhalb Ω' verschwinden, derjenige die kleinste Oberfläche, dessen Stützfunktion auf Ω' konstant ist. Analog zur Minkowskischen Darstellung der konvexen Polyeder gegebener Normalenrichtungen mittels freier positiver Parameter kann der allgemeinste konvexe Körper, dessen Oberflächenfunktion außerhalb Ω' verschwindet, erhalten werden als Durchschnitt der den Nullpunkt enthaltenden Halbräume mit den Normalenrichtungen $\bar{n} \subset \Omega'$ und den Abständen $H^*(\bar{n})$ der Begrenzungsebenen vom Nullpunkt, wo $H^*(\bar{n})$ eine beliebige positive stetige Funktion auf Ω' ist. Das Volumen des Körpers ist dann ein in gewissem Sinne differenzierbares Funktional der Funktion $H^*(\bar{n})$ auf Ω' . Hier auf und auf dem Brunn-Minkowskischen Satz beruht der Beweis des genannten Satzes. — Zur Verallgemeinerung von II, die besagt, daß die Oberflächenfunktion eines konvexen Körpers im wesentlichen willkürlich vorgeschrieben werden kann, vgl. auch vorst. Ref. Hier wird der konvexe Körper mit der gegebenen Oberflächenfunktion (im Gegensatz zur vorst. ref. Arbeit) nicht durch Polyederapproximation gewonnen, sondern es wird das von Minkowski für Polyeder gelöste Minimumproblem direkt für willkürliche konvexe Körper behandelt. Wesentlich ist hierbei die schon oben erwähnte Differenzierbarkeit des Volumens nach der verallgemeinerten Stützfunktion $H^*(\bar{n})$. — Schließlich wird bemerkt, daß die Krümmungs- (Oberflächen-) Funktionen m -ter Ordnung für $m < n$ nicht im selben Maße willkürlich vorgeschrieben werden können. (Referiert nach dem deutschen Auszug.) W. Fenchel.

Linsman, M.: *Sur la théorie de l'ordre des figures réelles et les travaux de M. Haupt.* Enseignement Math. 37, 23—48 (1938).

Einführender Bericht über Fragestellungen und Ergebnisse, welche sich im Anschluß an klassische Arbeiten von Juel und Hjelmslev in neuerer Zeit entwickelt haben, soweit sie nicht schon bei P. Montel [Bull. Sci. math. 48, 109—128 (1924)] aufgeführt sind. Ein ausführliches Literaturverzeichnis ist beigegeben, das durch folgende inzwischen erschienene Arbeiten noch ergänzt werden kann: H. Haller, Über die K_3 -Schmiegegebilde der ebenen Bogen von der K_3 -Ordnung drei [S.-B. physik.-med. Soz. Erlangen 69, 215—218 (1937)]; M. Linsman, Acad. roy. Belg. Cl. Sci. Mém. 17 (1938), dies. Zbl. 18, 331; O. Delvendahl, Über Kurven beschränkter Ordnung, Berlin 1938, dies. Zbl. 18, 276; L. Pimiä, Über Vielfache 3. Ordnung; dies. Zbl. 18, 377.

Haupt (Erlangen).

Bol, G.: Über Geradengewebe. „Topologische Fragen der Differentialgeometrie“. LXV. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 17, 45—58 (1938).

Das Nomographieproblem, ob sich ein Nicht-Sechseckgewebe auf mehr als eine projektiv verschiedene geradlinige Form bringen läßt, hat Verf. in Hamburg. Abh. 1930, 264 so weit erledigt, daß er zeigte, es könne höchstens 17 solche Formen geben. Indem er eine der möglichen Normierungen nicht benutzt, vereinfacht er nun die Formeln und zeigt die Projektivität der Abbildung, wenn einige der Geradenscharen Büschel oder Tangentenscharen von Kegelschnitten sind. Er meint, man könne auf diese Weise vielleicht ein Gegenbeispiel für die Vermutung der Eindeutigkeit finden. (EXIV. vgl. dies. Zbl. 14, 230.) Lochs (Kennelbach).

Topologie:

Nielsen, Jakob: Einige Methoden und Ergebnisse aus der Topologie der Flächenabbildungen. (Oslo, 14.—18. VII. 1936.) C. R. congr. int. Math. 1, 128—139 (1937).

A report upon some recent results, methods and unsolved questions concerning

topological automorphisms of a Riemann surface of an algebraic curve of genus $p > 1$. The search for invariants of transformation classes forms the main topic of the report. Particular attention is given to periodic transformations and to transformation classes of finite order. Quite remarkable are the topological proofs of the classical results by Hurwitz and Wiman on regular Riemann surfaces and the extension to general topological automorphisms, in particular to those of finite order. This topologization of a classical topic in algebraic geometry can be put in the same class with Lefschetz's topological theory of algebraic correspondences, both being applications of general fixed point theorems in topology.

Zariski (Baltimore).

Brödel, Walter: Deformationsklassen bei mehrdeutigen topologischen Abbildungen. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 89, 135—166 (1937).

Zwei topologische Selbstabbildungen einer Fläche werden als (isotop) deformationstheoretisch äquivalent (oder zur gleichen Isotopieklasse gehörig) bezeichnet, wenn sie Mitglieder einer stetig von einem Parameter abhängenden Schar von topologischen Selbstabbildungen der Fläche sind. Diesen Deformationsbegriff ersetzt Verf. für algebraische Riemannsche Flächen durch einen umfassenderen, indem er zunächst zu topologischen Abbildungen einer Fläche auf eine andere gleichen Geschlechts p übergeht, dann diese sich durch stetige Verschiebung der Verzweigungspunkte (bei Wahrung der Blätterzahl und des Geschlechts) stetig ändern läßt, wobei insbesondere Verzweigungen höherer Ordnung in einfache Verzweigungen aufgelöst werden können. Indem Anfangs- und Schlußlage der variablen Fläche zusammenfallen, kann man wiederum für topologische Selbstabbildungen derselben fragen, welche Reduktion der früheren Klasseneinteilung durch die zugelassene Erweiterung der Zwischenstadien bewirkt wird. Verf. untersucht auf Anregung von P. Koebe diese Frage für indikatrixerhaltende topologische Abbildungen, stützt sich dabei auf Resultate seiner Dissertation (vgl. dies. Zbl. 12, 374) und kommt zu folgendem Ergebnis: Eine topologische, indikatrixerhaltende Abbildung ist im angegebenen Sinne mit der Identität äquivalent 1. immer für $p \leq 2$, 2. für $p > 2$, falls die Blätterzahl mindestens 3 ist, 3. für $p > 2$ und Blätterzahl 2 dann und nur dann, wenn sie eine Kette von $2p + 1$ Hauptrückkehrschnitten wieder auf eine Kette von Hauptrückkehrschnitten abbildet. (Hauptrückkehrschnitte projizieren sich in einen einfachen Bogen zwischen zwei Verzweigungspunkten; jedes Kettenglied schneidet seine Nachbarn in genau je einem Punkte und die übrigen Glieder der Kette nicht.) — Für $p > 2$ und Blätterzahl 2 bleibt die Klassenzahl unendlich. — Die Schlüsse sind z. T. nur angedeutet.

Jakob Nielsen (Kopenhagen).

Kaplan, Wilfred: The topological structure of a variety defined by an equation. Compositio Math. 5, 327—346 (1938).

The equation $\Phi_1(x_1) + \dots + \Phi_n(x_n) = 0$ is studied with a view to finding the topology of the resulting locus V . It is assumed that each Φ_i is continuous, and is increasing, constant, or decreasing in each interval of a subdivision of the x_i -axis. Then V is proved to be a complex. If the Φ_i are constant in no interval, then the singularities of V are considerably restricted. If $n = 2$, then V may have isolated points, and points at which four arcs meet; for a general n , all singularities are at vertices, and are of the same type as $\pm x_1^2 \pm \dots \pm x_n^2 = 0$ at the origin. Equations $\Phi_1(x_1, x_2) + \dots + \Phi_n(x_{2n-1}, x_{2n})$ are discussed briefly. *Whitney* (Cambridge).

Whitney, Hassler: Cross-sections of curves in 3-space. Duke math. J. 4, 222—226 (1938).

Es wird bewiesen, daß jeder Querschnitt durch eine im Sinne des Verf. (vgl. H. Whitney, dies. Zbl. 6, 371) reguläre Kurvenfamilie im dreidimensionalen euklidischen Raume, die ein Gebiet ausfüllt, einen Querschnitt enthält, der eine zweidimensionale Zelle ist und daß infolgedessen jede derartige Kurvenfamilie im kleinen sich wie eine Familie gerader Linien verhält.

Reinhold Baer.

Hopf, Heinz: Eine Charakterisierung der Bettischen Gruppen von Polyedern durch stetige Abbildungen. Compositio Math. 5, 347—353 (1938).

For $r = n$ the author has already characterized the r -dimensional homology

groups of an n -polyhedron K by means of homotopy properties [Comment. math. helv. 5, 39—54 (1932); this Zbl. 5, 313]. In this paper a similar characterization is given for all $1 < r \leq n$. Denoting the subcomplex of K consisting of all simplexes of dimension $\leq r$ by K^r , use is made of continuous single-valued maps of K^r in the r -sphere S^r which can be extended to maps of K^{r+1} in S^r ("normal" maps), and of the group [H. Freudenthal, Compositio Math. 2, 134—162 (1935); this Zbl. 11, 273] of mapping classes of K^r in S^r . It is proved that the r -dimensional homology group of K over the reals mod 1 is the character group mod 1 of the group of the normal mapping classes of K^r in S^r . Wallman.

Wojdyslawski, M.: Sur la contractilité des hyperspaces de continus localement connexes. Fundam. Math. 30, 247—252 (1938).

Eine Menge M_1 heißt zusammenziehbar in einer Menge M_2 , wenn eine stetige Funktion $f(x, t)$ zweier Variabler $x \in M_1$, $0 \leq t \leq 1$ existiert mit $f(x, 0) = x$, $f(x, t) \in M_2$, $f(x, 1) = \text{konst.}$ Ein Raum R heißt lokal zusammenziehbar, wenn in jeder Umgebung U eines Punktes $x \in R$ eine Umgebung V von x enthalten ist, die in U zusammenziehbar ist. Verf. beweist: Ist der metrische Raum R ein lokal zusammenhängendes Kontinuum, so ist der Hyperraum 2^R aller Teilmengen von R (metrisiert nach Hausdorff) lokal und in sich zusammenziehbar. Nöbeling (Erlangen).

Milgram, Arthur N.: Decompositions and dimension of closed sets in R^n . Trans. Amer. Math. Soc. 43, 465—481 (1938).

Eine Dissertation, deren Hauptergebnis innere Charakterisierung der k -dimensionalen, im n -dimensionalen euklidischen Räume R^n liegenden abgeschlossenen Punkt-mengen F bildet, und zwar durch folgende Zerlegungseigenschaft von F : k ist die kleinste Zahl, für welche es ein $\varepsilon > 0$ gibt derart, daß F Vereinigungsmenge einer abzählbaren Folge abgeschlossener Mengen ist, die alle vom Durchmesser $< \varepsilon$ sind und zu je zwei höchstens $(k - 1)$ -dimensionale Durchschnitte haben. Nebenergebnis: Haben abzählbar viele abgeschlossene Mengen zu je zwei höchstens $(n - 3)$ -dimensionale Durchschnitte, so kann ihre Vereinigungsmenge nur dann R^n zerlegen, wenn mindestens eine dieser Mengen es bereits tut. B. Knaster (Warszawa).

Wilder, R. L.: Sets which satisfy certain avoidability conditions. Čas. mat. fys. 67, 185—197 (1938).

Verf. stellt fünf Vermeidbarkeitsbegriffe auf [Beispiel: der metrische Raum R heißt i -vermeidbar im Punkte $P \subset R$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert derart, daß $\varepsilon > \delta$ und jeder i -Zyklus aus $F(P, \varepsilon)$ in $R - S(P, \delta)$ berandet], untersucht die Beziehungen zwischen ihnen und studiert einige Beziehungen zwischen abgeschlossenen Mengen, die solche Vermeidbarkeitseigenschaften haben, und ihren Komplementen in euklidischen Räumen. Nöbeling (Erlangen).

Mechanik.

● Garcia, Godofredo: Lezioni di Meccanica razionale, Vol. 1. Teoria dei Vettori. Cinematica. Lima: 1937. 316 S. [Spanisch].

Nella prefazione, l'Autore avverte di avere largamente attinto alla magistrale opera dei proff. Levi-Civita e Amaldi e di avere consultato con interesse i trattati della scuola francese. Anche per quanto riguarda la distribuzione della materia, il García si è attenuto fedelmente alla citata opera italiana, i cui notevoli pregi didattici, oltre che scientifici, sono ben noti a tutti i cultori della Meccanica razionale. — Il volume è diviso in otto capitoli, di cui i primi tre sono dedicati alla teoria dei vettori. Oltre le nozioni elementari fondamentali, l'Autore, nel Cap. 3°, introduce i concetti di gradiente, divergenza e rotazionale e ne espone le principali proprietà, dimostrando poi le classiche formole integrali che dominano le varie teorie della meccanica e della fisica matematica. I Cap. 4° e 5° trattano la Cinematica del punto e dei sistemi rigidi, il Cap. 6° contiene la teoria del moto relativo. Il Cap. 7° è dedicato al moto rigido intorno ad un punto

fisso ed in particolare alle precessioni regolari. Il Cap. 8° riguarda i moti rigidi piani e contiene lo studio delle traiettorie polari, dei profili coniugati, della formola del Savary, dei moti epi- ed ipocicloidali. *G. Lampariello (Roma).*

Wintner, Aurel: Galilei group and law of gravitation. *Amer. J. Math.* 60, 473—476 (1938).

It is known that, among all laws of attraction in which the force is proportional to a power of the distance, the case of the inverse cube is exceptional in many respects. The author examines the reason for this exceptional behaviour, and shows that with this law of attraction, the group of transformations of the equations of motion is larger than the Galilei group. This explains why Jacobi was able to find, for the problem of n bodies in the case of inverse cube attraction, two new first integrals. *Whittaker.*

Lazzarino, Orazio: Teoria sintetica dell'equivalenza fra i sistemi di equazioni differenziali di Euler-Poisson e di Hess-Schiff nella teoria dei giroscopi rigidi pesanti e studio dei casi singolari per i quali l'equivalenza non sussiste. *II. Ann. Scuola norm. super. Pisa*, II. s. 7, 109—136 (1938).

The equivalence described in the title does not hold if one or the other of two of Hess's invariants is independent of the time (cf. this *Zbl.* 18, 179). The motions which can occur under these circumstances are exhaustively classified. They include pure rotations and the motions of Hess, Staude and Młodziejowski. *Lewis.*

Johnsen, Leif: Sur la déviation non-holonyme. *Avh. Norske Vid. Akad. Oslo* 1938, 1—13 (Nr 3).

For the equations of motion of a dynamical system subjected to non-holonomic constraints, the author obtains a form analogous to Lagrange's equations without having to assume the restrictive conditions which limited Appell's treatment of the problem. He also generalises the kinematic interpretation found by Schieldrop in 1925 for the terms which in non-holonomic systems supplement the ordinary Lagrangean formula. *Whittaker (Edinburgh).*

Mises, R. v.: Das Verhalten der Hauptspannungen in der Umgebung einer Verzweigungsstelle. *Z. angew. Math. Mech.* 18, 74—76 (1938).

This paper discusses the nature of the distribution of the principal stresses in a plane stress system in the neighborhood of a point where $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$; $\tau = 0$. In particular, a singularity of the first order is discussed in detail, i. e. one where the stresses in the neighborhood of the singular point are given by:

$$\sigma_x = \sigma_0 + a_1 x + b_1 y,$$

$$\sigma_y = \sigma_0 + a_2 y + b_2 x,$$

$$\tau = a_3 x + b_3 y.$$

The discussion of the distribution of principal stresses in the neighborhood of (0, 0) is reduced to the discussion of a special quadric surface (a cone); the possible types of stress trajectories can then be classified and coordinated with the types of cones which may arise. *Stoker (New York).*

Himmelsmechanik, Gleichgewichtsfiguren:

Chkroeff, A.: Application de la méthode de Halphen au calcul des perturbations séculaires de la planète Hector (624). *Astron. J. Soviet Union* 15, 155—161 u. franz. Zusammenfassung 162 (1938) [Russisch].

Kopal, Z.: Beiträge zum Zweikörperproblem. *Astron. Nachr.* 265, 113—128 (1938).

Betrachtet wird ein Aufpunkt im Schwerfeld eines abgeplatteten inhomogenen Sphäroids, dessen Dichte als Funktion des Mittelpunktsabstandes durch einen Potenzansatz bestimmt wird. Mit Rücksicht auf die zylindrische Symmetrie gibt es einen Flächensatz. Bewegt sich also der Aufpunkt in der Äquatorebene, so ist das Problem durch Quadraturen lösbar. Sonst wird unter der nur näherungsweise erfüllbaren

Annahme einer nichtverschwindenden, aber konstanten kleinen Neigung eine approximative Integration des Problems gegeben und dabei vor allem die Perihelstörung diskutiert. Vgl. auch Verf., dies. Zbl. 17, 381. *Wintner* (Baltimore).

Dubošin, G.: On instability of periodic motions near collinear points of libration in the restricted problem of three bodies. *Astron. J. Soviet Union* 15, 209—219 (1938) [Russisch].

The above note treats the problem of periodic motions near collinear points of libration in the plane restricted problem of three bodies. With the aid of the methods of Liapounoff, the existence of a continuous family of periodic motions around each collinear point of libration is established. The motions are determined by series arranged in the order of increasing powers of the arbitrary constant. The coefficients of these series are finite series of sines and cosines of multiples of some variable proportional to time. The orbital stability of the motions in question is investigated, and all motions are shown to be orbitally unstable. *Autoreferat.*

Mineo, C.: Sulla impossibilità d'una stratificazione d'equilibrio omotetico per gli astri fluidi rotanti. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 26, 260—262 (1937).

A simplified proof of a theorem due to Wavre on the impossibility of a homothetic stratification. *D. C. Lewis* (Ithaca, N.Y., U.S.A.).

Garcia, Godofredo, et Alfred Rosenblatt: Sur la formule de Stokes dans la théorie de la gravité. *C. R. Acad. Sci.*, Paris 206, 423—425 (1938).

Behandlung der Aufgabe, eine Gleichgewichtsfigur, die nur wenig von der Kugelgestalt abweicht und auf der die Dichte- und Schwereverteilung vorgegeben sind, in eine benachbarte Gleichgewichtsfigur von vorgelegter Schwereverteilung zu verwandeln und die Dichteverteilung zu bestimmen. Wenn im besonderen die ursprüngliche Gleichgewichtsfigur eine Kugel ist, werden die Verteilungsfunktionen der Dichte und Deformation von zwei Integrodifferentialgleichungen bestimmt. *Hopfner* (Wien).

Relativitätstheorie.

Michalskij, N.: Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie. *Astron. J. Soviet Union* 15, 175—196 (1938) [Russisch].

Kurze Zusammenstellung der Grundlagen und kritischen Diskussion des vorhandenen experimentellen Materials. *R. Peierls* (Birmingham).

Scherrer, W.: Über die Prinzipien der Physik. *Helv. phys. Acta* 11, 219—224 (1938).

Nach allgemeinen Betrachtungen über die Grundlagen der Physik schlägt der Verf. eine Lagrangefunktion für die Wechselwirkung von zwei elektrischen Teilchen vor, in der ein skalares Potential auftritt und die außerdem homogen quadratisch in den Vierergeschwindigkeiten der Teilchen ist. *O. Klein* (Stockholm).

Born, M.: A suggestion for unifying quantum theory and relativity. *Proc. roy. Soc., Lond. A* 165, 291—303 (1938).

Es wird ein Prinzip der Reziprozität zwischen Zeit—Raum einerseits und Energie—Impuls andererseits aufgestellt, wonach der Grenzfall der Kernphysik als reziprokes Analogon zum Grenzfall der Makrophysik betrachtet wird. Dieser Grenzfall soll demnach mittels Einsteingleichungen im Energie—Impulsraum beschrieben werden, wobei der endlichen Einsteinwelt ein endlicher geschlossener Impulsraum entspricht. Als Resultat ergibt sich eine endliche Anzahl von Quantenzuständen im Impulsraum, worin die Auflösung der Selbstenergieschwierigkeit gesucht wird. *O. Klein.*

Kwal, Bernard: Une généralisation du principe variationnel et des équations canoniques de Hamilton. Application à la théorie relativiste des assemblées corpusculaires. *C. R. Acad. Sci.*, Paris 206, 642—644 (1938).

F is a quaternion function of space-time coordinates x_i and of $q_k(x)$, $\dot{q}_k(x)$ ($k=1, \dots, n$), where $q_k(x)$ is a quaternion and $\dot{q}_k(x) = \partial q_k(x) / \partial x$ in the notation of a previous paper (this Zbl. 16, 239). For the variation of $\iiint F dx_1 dx_2 dx_3 d(i x_0)$, extended over a

region in space-time, the author gives an expression which the reviewer is unable to follow: from this variation the author is led to equations which he calls "generalised equations of Euler", and claims to transform these to canonical form. *J. L. Synge.*

Venturelli, Lucia: *La statica einsteiniana nell'interno di una massa fluida gravitante.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 224—231 (1938).

Approximate solution of the field equations

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon \lambda_\mu \lambda_\nu - p g_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

for the static universe

$$ds^2 = V^2(dx^0)^2 - a_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3).$$

H. S. Ruse (Southampton).

Kalmár, L. v.: *Die klassische Deutung der Hubble-Erscheinung.* Astron. Nachr. 266, 147—148 (1938).

Versteht man unter Gravitationsabstoßung eine Massenkraft, die sich von der Gravitation nur durch das Vorzeichen unterscheidet, so kann man die Proportionalität zwischen der Radialgeschwindigkeit und der Entfernung eines im Abstand R von einem Weltzentrum O befindlichen extragalaktischen Systems darstellen als Resultat der Gravitationsabstoßung der in der Kugel vom Radius R um O gleichmäßig verteilt angenommenen Masse.

Straßl (Göttingen).

Fricke, W.: *Räumliche Verteilung und Rotverschiebungen der Spiralnebel im Milne'schen Universum.* Z. Astrophys. 16, 11—20 (1938).

It is argued that, contrary to the conclusion reached by McVittie (this Zbl. 17, 336), Hubble's five nebular counts can be satisfactorily represented in Milne's kinematical universe without the introduction of curved space. According to the author's calculation, the theoretical formula predicted by Milne's theory for the number of nebulae over the whole sky is satisfied by the five nebular counts provided that the influence of the red-shift on the brightness of the nebulae is taken to be $\Delta \cong 2,9 d \lambda / \lambda$, with a consequent effective nebular temperature of 7500°. Furthermore, Milne's theory of gravitation makes it possible to determine a theoretical value for the average mass of a nebula. As this turns out to be nearly ten times the value found by Plaskett for the Milky Way, some modification of Milne's gravitational theory seems to be needed.

H. S. Ruse (Southampton).

McVittie, G. C.: *Kinematical theory, curved space and the distribution of nebulae.* Z. Astrophys. 16, 21—28 (1938).

The author argues that Fricke's interpretation of Hubble's nebular counts in terms of Milne's kinematical theory (see the prec. rev.) is based upon an inexact use of the theoretical relation between red-shift δ and apparent photographic magnitude m . If the δ, m formula is used correct to the second order in δ , a direct appeal to Hubble's five counts and to the two Harvard counts shows, according to the author's argument, that a close fit for the observations is obtained only by the use of curved space. The corrections to m due to the red-shift are investigated and it is also deduced that the average density of matter in the inner metagalactic system is of the order of 10^{-29} gm/cm³.

H. S. Ruse (Southampton).

Milkutát, E.: *Zur Instabilität des Universums. Eine Bemerkung zur Boltzmann-Statistik im expandierenden sphärischen Weltmodell.* Astron. Nachr. 266, 41—44 (1938).

Die beiden Friedmannschen Gleichungen zwischen dem zeitlich veränderlichen Krümmungsradius der Welt einerseits sowie der Materiedichte und dem Druck andererseits lassen noch eine Funktion unbestimmt, die erst durch eine Zustandsgleichung der Materie festgelegt wird. Der Verf. zieht das von A. G. Walker [Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 4, Part IV, 238—253 (1936); vgl. dies. Zbl. 14, 87] näher untersuchte relativistische Analogon zur Boltzmannschen Stoßformel — ohne Stoßglied — heran, welches die Erhaltung der Teilchenzahl im 6-dim. Phasenraum ausdrückt, um zu einer Zustandsgleichung zu gelangen. Er glaubt zu beweisen, daß diese „Boltzmannstatistik“ mit dem sphärischen Weltmodell unverträglich ist.

Heckmann (Göttingen).

Astrophysik.

Mohorovičić, St.: Ein neues Gesetz für die Entfernungen im Sonnensystem. *Astron. Nachr.* 266, 149—160 (1938).

Walter, Kurt: Über das Masse-Leuchtkraft-Gesetz bei Berücksichtigung der Gezeiten-deformation der Sterne. *Z. Astrophys.* 15, 315—341 (1938).

The author describes several respects in which he finds the properties of stars to depend upon their tidal deformation in the gravitational field of a companion. A convenient measure of the deformation is given by parameter D which can be calculated from theory previously given. The stars studied in the paper, 51 in number, are listed in a table giving their bolometric magnitudes M_{bol} , mass M , spectral type, effective temperature T_{eff} , radius R , hydrogen content X calculated from Strömgren's theory (*Z. Astrophys.* 7, 222; this. Zbl. 7, 262), and the calculated values of D . Stars with $0 \leq D \leq 0,3$ are regarded as "undisturbed"; stars with $D > 0,3$ as "disturbed". The author first plots the graph of X as a function of $\log M$ for undisturbed stars, and draws a smooth curve through the points, thus giving a value of " $X_{\text{ungestört}}$ " for any value of M . He then plots the difference $\Delta X = X - X_{\text{ungestört}}$ as a function of D for disturbed stars, and considers separately the groups for (a) $1,8 < M < 7$ solar masses, (b) $M < 1,8$ solar masses, both for main sequence stars, and (c) sub-giants. In each group he finds an apparent characteristic relation between these quantities. Discussion of this result leads him to a consideration of the mass-luminosity relation. He finds that the disturbed stars are more luminous than undisturbed ones of the same mass. The difference ΔM_{bol} can be defined analogously to ΔX , and is plotted as a function of D for groups (a), (b), (c). Similar relations as for ΔX are revealed. This next leads the author to a consideration of the Russell diagram. He shows that an allowance for the apparent effect of tidal deformation would alter Strömgren's conclusions about the lines of constant X in this diagram. It is suggested that the law of Vogt and Russell stating that the constitution of a star depends only on the mass and chemical composition must be modified so as to admit the rotation as a third significant parameter. This is emphasized by consideration of the values of R . A graph of $\log M$ as a function of $\log R$ shows totally different behaviours for undisturbed and disturbed stars. The difference increases as M approaches the value 4 solar masses, becoming marked at about 2,5 solar masses and suggesting that some instability sets in at about this mass. This indicates a revised view of the structure of the main sequence in the Russell diagram, which is exhibited in a graph of M_{bol} as a function of $\log T_{\text{eff}}$; a break in the sequence is given by disturbed stars of masses between 2,5 and 4. The interpretation of all these results is discussed qualitatively, and the author offers the suggestion that they cannot be explained on the theory of radiative equilibrium, but that if the stars are in convective equilibrium, or possess a convective zone, the deformation might well have a large effect. The distinct behaviour of sub-giants is discussed in particular. *W. H. McCrea.*

Biermann, L.: Chemische Zusammensetzung und dynamische Stabilität der Sterne. *Z. Astrophys.* 16, 29—42 (1938).

The condition for dynamical stability of a star is that an expansion should require an increase in its total energy E . If E is a monotone function of the stellar radius, this requires that E should be negative, when the zero of E corresponds to a state of infinite diffusion at zero temperature. The author shows that this condition is equivalent to

$$\overline{(I/\Psi)} < \frac{3}{2} \overline{(kT/\Psi)},$$

where I is the ionisation-energy per free particle, Ψ is the limit of the binding energy down to which all electrons are ionised, k , T are the gas constant and temperature, and the bars denote suitably defined averages over the whole star. The greater part of the paper is concerned with obtaining estimates for I , Ψ for various values of the hydrogen content X and various admixtures of the typical heavier elements O, Mg,

Ca, Fe; it should be consulted for the methods employed. Actually it is found that, for given X , the value of I/Ψ is relatively insensitive to the relative proportions of the other elements. The required averages are then evaluated for various values of the stellar mass M , and radius R . The results are applied to giant stars and for all cases it is found that X must exceed a certain lower bound (>0) to ensure dynamical stability. In the cases of G -giants and sub-giants the lower bound of X is estimated at 10 or 20%. In the former case this result is in accord with independent estimates of X from the mass-luminosity law. In the case of normal giants it is estimated that X must be at least about $1/5$, and in the case of super-giants about $1/3$. We thus obtain lower limits for the hydrogen content in these latter cases for which it has hitherto proved impossible to derive values from the mass-luminosity law. *W. H. McCrea.*

Krause, H.: Über das Trägheitsmoment polytroper Gaskugeln. *Astron. Nachr.* **265**, 381—384 (1938).

Verf. berechnet für verschiedene Polytropen gemäß den Untersuchungen von Chandrasekhar und von Russell über rotierende Gaskugeln mit Hilfe der Radauschen Beziehung das Verhältnis $\eta = (C - A)/(C_0 - A_0)$. Hier bedeuten A das äquatorale und C das polare Trägheitsmoment eines Rotationsellipsoids und A_0 und C_0 dieselben Größen für das entsprechende homogene Rotationsellipsoid. Die so berechneten η -Werte werden mit den direkt durch mechanische Quadratur berechneten Werten von $\mu = \frac{C}{C_0}$ verglichen, und die Unterschiede werden diskutiert. *Strömgren.*

Chandrasekhar, S.: Ionization and recombination in the theory of stellar absorption lines and nebular luminosity. *Astrophys. J.* **87**, 476—495 (1938).

Verf. behandelt das allgemeine Problem der Aufstellung der Weggleichung für die Intensität in den Strahlungsfeldern der Sternatmosphären und planetarischen Nebel. Der erste Teil der Arbeit enthält eine Erweiterung der Milneschen mikroskopischen Methode zur Behandlung des Problems in dem Sinn, daß drei statt nur zwei stationäre Zustände der mit der Strahlung in Wechselwirkung stehenden Atome betrachtet werden. Physikalisch bedeutet dieses, indem der dritte Zustand mit der Gesamtheit der freien Elektronenzustände identifiziert wird, daß außer Streuungs- und Absorptionsprozessen auch noch die durch Elektroneneinfang und Photoionisation zu beschreibenden Fluoreszenzprozesse berücksichtigt werden. Die Analyse des Dreizustandefalles wird bis zur Aufstellung der Weggleichung vollständig durchgeführt. Sodann wird das Resultat mit einer in der Theorie der Fraunhoferschen Linien, insbesondere für das Studium der Restintensitäten benutzten Weggleichung (B. Strömgren) verglichen. Dieser Vergleich entspricht dem Vergleich zwischen der Milneschen Weggleichung und der Schuster-Schwarzschildschen. Die vollständige Übereinstimmung wird nachgewiesen. Aus der abgeleiteten Weggleichung läßt sich aber andererseits durch Grenzübergang auf den Fall verschwindender Stoßübergangswahrscheinlichkeiten und starker Strahlungsverdünnung die Weggleichung des Problems des Leuchtens der planetarischen Nebel (Ambarzumian, Chandrasekhar) gewinnen. Der Zusammenhang zwischen dem Problem der Restintensitäten der Fraunhoferschen Linien und dem Problem der Emissionsspektren der planetarischen Nebel wird somit beleuchtet. Die Weggleichung wird ferner zu einer genaueren Entwicklung der Theorie der planetarischen Nebel verwendet. Es werden für den Dreizustandefall bei verschwindenden Stoßübergangswahrscheinlichkeiten vier Integrale des Strahlungsfeldes abgeleitet. Eine weitere Arbeit, die die konkrete Anwendung der so gefundenen Gleichungen bringen soll, wird angekündigt. *Benkt Strömgren (Kopenhagen).*

Sevin, Émile: Sur le problème de l'agitation thermique en présence d'un champ de gravitation. *C. R. Acad. Sci., Paris* **206**, 1621—1623 (1938).

By considering the gravitational acceleration of an atom between its collisions with other atoms the author claims to find an equation for the behaviour of stellar material additional to those usually given. From it he concludes that a star must be a polytrope of polytropic index 3. *W. H. McCrea (Belfast).*